UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

Facoltà di Economia

Corso di laurea in Economia e Finanza

STUDIO SUL RISCHIO RELATIVO A DERIVATI LINEARI SU COMMODITIES, CON L'UTILIZZO DI SIMULAZIONE STORICA

Relatore: Chiar.mo Prof. Marco Marchioro

Tesi di Laurea di:

Andrea BOSCHETTO

Matr. N. 704936

Anno Accademico 2010/2011

Indice

Ringraziamenti

Desidero ringraziare sentitamente, in primis, il Professor Marco Marchioro, per la Sua inesauribile disponibilità e per tutti gli insegnamenti elargitimi sia durante le Sue lezioni sia durante la realizzazione di questo lavoro. Rivolgo, in secundis, un doveroso ringraziamento a "StatPro Italia s.r.l." ed in particolare al Dr. Davide Borrello, che ha, Suo malgrado, dovuto sopportare i lunghi incontri "giovediali" tra me ed il Professor Marchioro. Non posso poi certo dimenticarmi di tutti i Professori che in questi cinque lunghi anni hanno avuto la capacità di rendermi interessato ai loro insegnamenti: un grosso "grazie" è rivolto anche a loro.

Passando a temi meno accademici e più personali, un immenso ringraziamento va ai miei genitori, Patrizia e Claudio, per il supporto affettivo, morale ed economico fornitimi durante tutto il corso della mia vita. Sappiano che voglio loro un gran bene e che sono loro infinitamente grato, soprattutto per avermi sempre permesso di esprimere la mia individualità e per non avermi mai imposto nulla.

Ringrazio poi tutti gli amici conosciuti durante la mia avventura universitaria. Mi auguro di riuscire a mantenere nel tempo il rapporto speciale che si è creato con alcuni di loro, ed auguro a tutti un futuro roseo, se lo meritano.

Rimanendo in tema di rapporti speciali, devo un grandissimo ringraziamento alla mia fidanzata Anna (Lisa) per avermi fatto scoprire il significato della parola "amore", quello che, come recita un noto detto popolare da noi preso un po' troppo alla lettera, "non è bello se non è litigarello". Il sentimento è forte e sincero: sono sicuro che andremo lontano, insieme.

Lascio per ultimo un ringraziamento particolare, rivolto ad un amico che non c'è più. È l'amico con cui ho passato i momenti più felici della mia infanzia, con il quale sono cresciuto, o, per meglio dire, che mi ha cresciuto: è mio nonno.

Solo ora capisco che la buona stella sotto cui diceva fossi nato altro non era che lui stesso. Spero sia orgoglioso di quello che sono diventato, perché gran parte è merito suo. Mi manca terribilmente.

Dedico questo lavoro a lui, lasciandogli un messaggio:

"7-16-1-21-9-5 4-9 18-19-18-18-13, 18-9 20-13-7-10-9-13 2-5-12-5".

Introduzione

In “Studio sul rischio relativo a derivati lineari su materie prime, con l’utilizzo di simulazione storica” ci si occuperà di valutare il rischio legato ad un ipotetico investimento della durata settimanale in contratti futures su commodities, sfruttando le informazioni fornite dall’osservazione dell’andamento dei prezzi degli stessi negli ultimi tre mesi.
Come soleva dire il filosofo Giambattista Vico: “la storia è fatta di corsi e ricorsi”, dunque gli accadimenti passati tendono a ripetersi nel futuro. Proprio quest’idea è alla base della simulazione storica realizzata: si è ipotizzato che quanto accaduto sul mercato finanziario nei tre mesi precedenti possa ripetersi nella settimana seguente, in cui si è effettuato l’investimento. I prezzi dei contratti futures saranno scomposti nelle loro componenti elementari (prezzo spot, “convenience yield” e tasso zero) e di ciascuna di esse si analizzerà il comportamento passato. Effettuata la simulazione, che darà vita a 500 scenari settimanali equiprobabili per ogni investimento, si procederà con la valutazione del rischio, tramite le misure che si riterranno più idonee, e con l’analisi delle componenti che hanno provocato quel determinato livello di rischiosità.
Per avvicinare il lettore al mondo dei derivati su materie prime, il primo capitolo sarà interamente dedicato ad essi e ai mercati su cui vengono trattati. Si inizierà con un breve “excursus” storico, a cui seguirà una descrizione dei mercati e degli attori che vi partecipano, nonché un’analisi delle caratteristiche specifiche del mercato di strumenti futures. Particolare attenzione verrà posta nel trattare le relazioni matematiche che legano prezzi spot, prezzi forward e prezzi futures e alla presentazione dei fondamentali concetti di “convenience yield” e tasso zero.
Nel secondo capitolo si parlerà del rischio e degli strumenti atti a misurarlo. Si illustreranno le misure più diffuse ed utilizzate dai “traders” di tutto il mondo, soffermandosi in particolare su quelle legate al “downside risk”, come il “Valore a Rischio” e gli strumenti da esso derivati, che hanno negli ultimi anni acquisito sempre maggiore importanza. Si parlerà infine del rischio legato esclusivamente alle materie prime, quello di trasporto e quello di consegna.

Dal capitolo tre a seguire l'argomento principale sarà il lavoro svolto per effettuare la simulazione storica.

Il capitolo tre avrà il compito di introdurre il lettore nel mondo di QuantLib, di presentare le materie prime scelte per gli investimenti ed i dati utilizzati per il calcolo dei tassi zero.

Il capitolo quattro si occuperà delle altre due grandezze fondamentali ("convenience yield" e prezzo spot) e del loro calcolo, per finire con una presentazione dei principali modelli d'interpolazione, strumento fondamentale per poter compiere la simulazione storica.

Il capitolo finale sarà interamente dedicato alla simulazione vera e propria. Si vedrà come dalle osservazioni relative ai tre mesi precedenti si sia giunti alla creazione di scenari giornalieri, e come da questi ultimi si siano realizzati quelli settimanali. A quel punto verrà analizzato il possibile andamento di tre ipotetici investimenti, basati su commodities differenti, e sarà valutato il loro rischio. La parte finale del quinto capitolo sarà interamente dedicata alla presentazione dei risultati ottenuti e all'analisi di questi ultimi.

Capitolo 1 – Le commodities e gli strumenti derivati

Le commodities costituiscono l'unico "spot market"[1] esistente sin dai tempi più antichi della storia dell'uomo. Mentre agli albori della civiltà i bisogni umani erano semplici, essi si sono via via evoluti: vi è stato un passaggio dal baratto di essenziali commodities agricole alla compravendita di metalli, fino ad arrivare ad elaborati contratti futures sulle energie.

Nei tempi antichi compratori e venditori solevano incontrarsi in luoghi definiti ove le transazioni portavano ad immediata consegna del bene. Col trascorrere degli anni, nel diciottesimo e nel diciannovesimo secolo, gli agricoltori hanno incominciato a vendere le loro piantagioni a semina appena avvenuta: in questo modo potevano finanziare il processo di coltivazione. Nascevano così, a Chicago e a Londra, i primi mercati di strumenti forward.

Il crescente bisogno di standardizzazione dei contratti, porta, a metà del diciannovesimo secolo, alla nascita del "New York Cotton Exchange" (NYCE - 1842) e del "Chicago Board Of Trade" (CBOT - 1848).

Il mercato delle commodities ha caratteristiche differenti dai mercati azionari e obbligazionari, sicuramente più noti al grande pubblico.

I prezzi spot sono stabiliti dall'incontro di domanda e offerta (o, per meglio dire, dall'intersezione delle curve che le rappresentano) e non dal "net present value[2]" dei flussi di cassa che potrebbero essere generati. La domanda è solitamente totalmente inelastica rispetto al prezzo, poiché trattasi di beni necessari per l'uomo, ma può comunque variare in base ai cambiamenti nelle preferenze di consumo, allo sviluppo economico mondiale o semplicemente alle condizioni meteorologiche (un inverno particolarmente mite porterà ad un calo della domanda di gas naturale, ad esempio). L'offerta è definita invece dalla produzione e dalle scorte: queste ultime, nel caso di commodities che hanno possibilità di esaurimento (ad esempio il petrolio), hanno elevato impatto sui prezzi di lungo periodo.

[1] Uno spot market è un mercato finanziario in cui ogni acquisto o vendita di strumenti finanziari si conclude con l'effettiva e immediata consegna del bene.

[2] Il valore attuale di una serie di cash flows viene definito attualizzando gli stessi sulla base del tasso di rendimento.

Le transazioni finanziarie di strumenti derivati, quali contratti forward, contratti futures e opzioni delle più svariate tipologie, rappresentano un volume molto elevato delle transazioni totali, ed i prezzi e la volatilità di questi strumenti sono strettamente legati a quelli presenti sullo spot market. Ciò è dovuto al fatto che il bene sottostante (la commodity) viene consegnato a scadenza dello strumento derivato e all'esistenza della relazione "spot-forward"[3]. È dunque necessario, per poter operare efficientemente sul mercato finanziario delle commodities, conoscere molto bene le caratteristiche del mercato fisico, che ricopre tutt'oggi un ruolo fondamentale.

È inoltre necessario sottolineare le implicazioni dovute all'esistenza della consegna fisica del bene: essa genera infatti dei costi (di spedizione, di stoccaggio, ecc) e dei rischi, legati a trasporto e consegna, non sottovalutabili e che verranno affrontati nel capitolo successivo.

Tornando al breve excursus storico, è importante porre l'attenzione su come gli ultimi due decenni siano stati testimoni di un profondo mutamento nel mercato mondiale delle commodities: tumulti e rivoluzioni politiche, mutazioni delle condizioni economiche ed elevata crescita del consumo di beni in alcuni Paesi emergenti hanno portato ad un incremento della volatilità di offerta e di prezzi, rendendo necessaria per molti settori economici un'attività di "hedging"[4] tramite strumenti derivati.

Sui mercati di commodities, come sugli altri mercati, non agiscono solamente compratori e venditori, ma sono presenti anche vari intermediari, che si occupano della contrattazione, della spedizione, della consegna, dello stoccaggio, ecc.

[3] Vedi "Contratti forward e contratti futures".

[4] "Hedging" indica una strategia d'investimento votata alla riduzione del profilo di rischio.

1.1 - Mercati di strumenti derivati su commodities: dalla nascita ad oggi

Il primo esempio di strumento derivato su di una commodity sembra risalire addirittura all'antica Grecia. Il noto filosofo Aristotele, nella sua opera "La politica", narra la storia dell'altrettanto noto filosofo Talete di Mileto che, grazie alle sue doti predittive, giunse alla conclusione che il raccolto delle olive del prossimo autunno sarebbe stato particolarmente abbondante. Si rivolse quindi ai proprietari locali di torchi, e si garantì a prezzi molto convenienti l'assoluto monopolio nel loro utilizzo. Quando il raccolto si rivelò essere realmente fuori dal comune, ci fu un brusco aumento della domanda di utilizzo di torchi, che superò notevolmente l'offerta al tempo disponibile. Talete vendette così la possibilità di utilizzo dei torchi ad un prezzo ben maggiore di quello pagato in precedenza, guadagnando una notevole quantità di denaro. Questa è la storia di quella che sembra essere la prima opzione nella storia dell'umanità.

Nasce invece ad Osaka, Giappone, nel 1730, la prima borsa moderna dedicata allo scambio di futures, la "Dojima Rice Exchange". A seguito di problemi relativi ai raccolti e alle contrattazioni, il prezzo del riso subì in quegli anni un forte crollo, ed i samurai, pagati in natura per i loro servigi proprio con il cereale in questione, furono i primi a subire ingenti perdite. Furono dunque i samurai stessi, al fine di garantire una certa stabilità al loro salario, a dar vita al mercato di strumenti futures sul riso.

Per la vera espansione dei mercati di derivati su commodities, bisogna attendere il diciannovesimo secolo e spostarsi dall'altra parte del mondo, negli Stati Uniti d'America. Nella seconda metà del 1800, infatti, nascono nel "midwest" ben 1600 borse, soprattutto in corrispondenza di porti e di importanti crocevia. Al giorno d'oggi la quasi totalità di queste borse è scomparsa, lasciando spazio a soli sei mercati, ove ogni anno vengono trattati più di 600 milioni di contratti futures. Interessante notare come la maggior parte dei futures qui trattati siano venduti e acquistati attraverso una contrattazione "alle grida" e non telematicamente, come avviene invece per la maggior parte delle contrattazioni odierne.

Il più antico di essi, il “Chicago Board of Trade” (CBOT), è stato per gran parte della sua storia interamente dedicato alle commodities agricole, mentre oggi tratta anche metalli preziosi.
Il “Chicago Mercantile Exchange” (CME), il più grande degli Stati Uniti e il secondo più grande del mondo per lo scambio di futures, tratta pancetta, bestiame, prodotti caseari e legname.
Il “New York Mercantile Exchange” (NYMEX) è il più grande mercato di futures su commodities del mondo, trattando petrolio (della qualità WTI, “West Texas Intermediate”) , gas naturale, rame, alluminio e metalli preziosi.
Di particolare importanza, oltre ai mercati statunitensi, vi sono:

- Per l’Europa:
    - il “London International Financial Futures Exchange” (LIFFE), specializzato in opzioni e futures su cacao, orzo, caffè della qualità “robusta”, zucchero e patate (facente parte del gruppo “NYSE Euronext”).
    - il “London Metal Exchange” (LME), che tratta metalli non ferrosi, quali alluminio (sia puro che lega), rame, nickel, stagno, piombo e argento.
- Per l’Asia:
    - il “Tokyo Commodity Exchange” (TOCOM), che si occupa di metalli, petrolio e derivati e gomma.
    - il “Dalyan Commodity Exchange”, cinese, che tratta futures sulla soia e suoi derivati (olio e farina), granturco, olio di palma e polietilene lineare a bassa densità (conosciuto con l’acronimo di LLDPE, è un prodotto derivato dal petrolio).
    - il “Multi Commodity Exchange” (MCX), indiano, è probabilmente il primo mercato mondiale in quanto a numero di commodities differenti disponibili su di esso.

Necessitano sicuramente di una menzione particolare due società che operano sui mercati di commodities (pur svolgendo anche attività di altro tipo), l’”Intercontinental Exchange” (ICE) e la “NYSE Euronext”.

L’ICE è una società finanziaria statunitense che gestisce un mercato telematico di strumenti derivati su commodities, quali petrolio, gas naturali, carbone, zucchero, cacao, succo d’arancia, cotone e caffè. Nel 2001 ha acquisito l’”International Petroleum Exchange” (IPE), uno dei colossi mondiali del business degli strumenti derivati sulle materie prime energetiche, diventando uno dei leader del mercato.
La “NYSE Euronext” è invece una società multinazionale, che come si può intuire opera negli Stati Uniti e in Europa, nata dalla fusione tra la borsa newyorkese, il “New York Stock Exchange”, e il gruppo europeo “Euronext”. Attualmente, è il principale mercato finanziario mondiale, possedendo le borse a New York, Chicago, San Francisco, Amsterdam, Bruxelles, Parigi, Lisbona, Londra e Belfast.
Sul mercato futures odierno, la categoria di commodity più trattata è il petrolio con i suoi derivati, con 200.000 transazioni giornaliere sul NYMEX e 100.000 sull’IPE relative al solo petrolio grezzo. Il secondo posto della classifica è occupato dal gas naturale, il terzo dalle commodity agricole, ove sono i cereali a padroneggiare (basti pensare che il granturco è, per volume di contratti, secondo solo al petrolio grezzo). Tra i metalli industriali i più trattati sono l’alluminio e il rame, mentre tra i metalli preziosi le prime posizioni sono divise tra oro e argento.

1.2 - Contratti forward e contratti futures

Un contratto forward può essere definito come un accordo tra due parti, stipulato al tempo $t = 0$, di scambiarsi alla data futura T una determinata quantità di una commodity in cambio di un certo quantitativo di denaro $f^T(0)$, il prezzo forward riferito alla data T.
Un contratto futures è molto simile ad un contratto forward, tranne per il fatto che esso ha caratteristiche standardizzate e permette di eliminare quasi completamente il rischio creditizio, poiché l’unica controparte con cui compratore e venditore

trattano è la camera di compensazione[5]. Essa richiede a compratore e venditore di versare all'interno di un conto margine, prima di entrare nel contratto futures, un determinato margine iniziale, calcolato in base al valore del contratto stesso. Quanto versato come margine iniziale andrà giornalmente a variare in base alle performance del futures: essendo un così detto "gioco a somma zero", se il venditore registra una variazione positiva, il compratore registrerà la stessa variazione ma di segno opposto, e viceversa. Il conto margine, al netto delle variazioni giornaliere, deve sempre essere superiore al margine di mantenimento, anch'esso stabilito dalla camera di compensazione in base al valore del contratto futures. In caso ciò non avvenga, la camera di compensazione richiede alla parte in perdita di riportare il conto margine ad un livello pari al margine iniziale, tramite una procedura chiamata "margin call".

I contratti futures hanno diversi scopi, da quello di facilitare la compravendita di commodities come strumenti finanziari a quello di cautelarsi dal rischio di prezzo: l'agricoltore che vende il suo raccolto a semina appena avvenuta, tramite un futures, si garantisce entrate certe.

Numericamente, si definisce il prezzo al tempo 0 del contratto futures con scadenza a T come $F^T(0)$. Il giorno seguente, il prezzo del medesimo contratto sarà indicato come $F^T(1)$ e molto probabilmente differirà da $F^T(0)$.

Nel caso in cui $F^T(1)$ fosse minore di $F^T(0)$, il compratore del futures avrebbe subito una perdita, e se essa, $F^T(1) - F^T(0)$, si rivelasse tale da portare il conto margine sotto il livello del margine di mantenimento, la camera di compensazione richiederebbe una margin call.

Espandendo le considerazioni di cui sopra al periodo che va dal tempo 0 al tempo T, si ottiene il profilo "Profit and Loss" (P&L) della posizione lunga (acquisto) sul futures iniziata al tempo 0 e mantenuta fino al tempo T.

$$P\&L = F^T(T) - F^T(0)$$

$$F^T(T) - F^T(0) =$$

$$= [F^T(T) - F^T(T-1)] + \cdots + [F^T(2) - F^T(1)] + [F^T(1) - F^T(0)]$$

[5] La camera di compensazione è l'organismo che si occupa delle operazioni di compensazione e del corretto svolgimento delle transazioni. Essa garantisce sempre la piena solvibilità della controparte, anche nel caso che quest'ultima dovesse andare in bancarotta.

Si potrebbe voler valutare il valore di una posizione lunga P su futures ad un tempo intermedio t incluso tra 0 e T.

Al tempo 0 viene acquistato il futures, quindi il flusso di cassa a T della posizione P sarà pari a $-F^T(0)$. Al tempo t viene aperta una nuova posizione P_1 vendendo un futures con la medesima scadenza del primo (flusso di cassa a T: $+F^T(t)$), di modo che le consegne della commodity sottostante si compensino. Si considera poi una terza posizione P_2, somma delle precedenti due posizioni.

$$V_{P_2}(T) = F^T(t) - F^T(0)$$

Poiché il valore della posizione P_2 è perfettamente conosciuto al tempo t, essa risulta totalmente priva di rischio tra t e T. Per il principio di non arbitraggio

$$V_{P_2}(t) = e^{-r(T-t)}[F^T(t) - F^T(0)]$$

ove r è il tasso d'interesse risk free.

Sapendo poi che $V_{P_2}(t) = V_P(t) + V_{P_1}(t)$ e che $V_{P_1}(t) = 0$, risulta $V_{P_2}(t) = V_P(t)$ e quindi:

$$V_P(t) = e^{-r(T-t)}[F^T(t) - F^T(0)]$$

Se il sottostante (la commodity) del contratto forward/futures è trattato su un mercato liquido[6], la condizione di non arbitraggio[7] tra il prezzo spot e il prezzo forward/futures impone che:

$$S(T) = f^T(T)$$

Se la condizione non fosse rispettata, alla data T si potrebbe realizzare dell'arbitraggio comprando in un mercato e vendendo nell'altro.

Graficamente, è possibile rappresentare il profilo P&L, sia della posizione lunga sia della posizione corta (di vendita), come funzione del prezzo spot $S(T)$ (analoghi risultati si ottengono considerando le medesime posizioni aperte utilizzando contratti forward).

[6] In un mercato liquido un disinvestimento non causa una significativa variazione del prezzo e genera una minima perdita di valore.

[7] Vedi "Attori nel mercato di derivati: hedgers, speculatori e arbitraggisti".

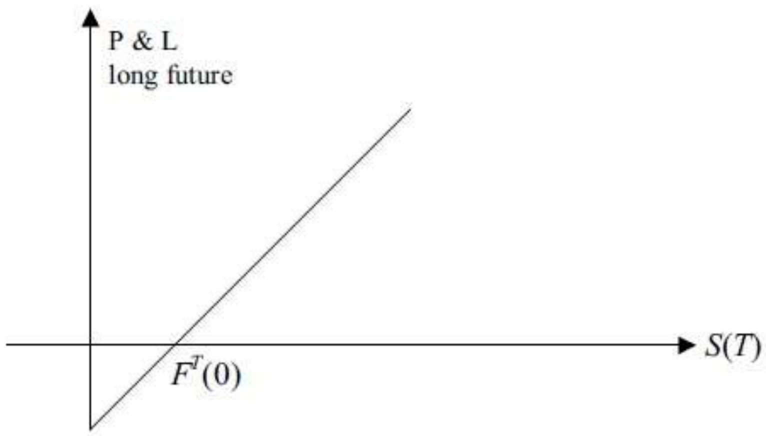

Figura 1 – Profilo "Profit & Loss" di una posizione lunga su contratti futures

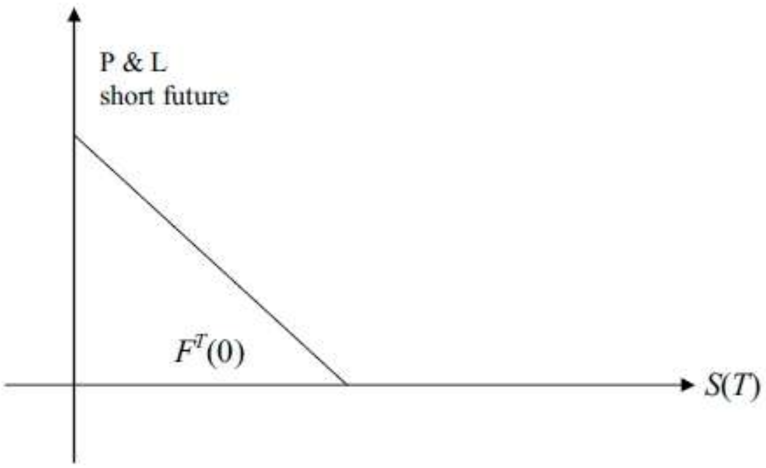

Figura 2 – Profilo "Profit & Loss" di una posizione corta su contratti futures

La parte che acquista il forward/futures vuole cautelarsi da un innalzamento del prezzo del sottostante tra la data 0 e la data T, mentre la parte che vende il contratto vuole cautelarsi da un abbassamento del prezzo del sottostante tra le stesse date.

Il prezzo del forward $f^T(0)$ (o del futures $F^T(0)$) rappresenta la stima delle due parti, al tempo 0, di quanto varrà il sottostante alla data T, tenendo conto anche del "risk premium"[8] che dovranno pagare o ricevere (nel caso di contratti futures non esiste premio per il rischio).

[8] Il "risk premium" è legato al rischio d'insolvenza di una delle due parti.

Il prezzo di un forward e il prezzo di un futures sullo stesso sottostante e con la stessa data di scadenza differiscono per via di tasse, costi di transazione e altri elementi, quali ad esempio il rischio di insolvenza (presente solamente in un contratto di tipo forward). Nella pratica i due prezzi rimangono molto simili, poiché è il valore del sottostante con le sue fluttuazioni a farla da padrone per la determinazione dei prezzi.

Raramente un contratto futures viene mantenuto fino alla scadenza, di modo che solamente l'1% dei contratti trattati dà effettivamente luogo alla consegna fisica del bene. È infatti possibile terminare la posizione assunta in un futures anche in altri due modi: assumendo prima della scadenza una posizione simmetrica in un futures con le stesse caratteristiche oppure sottoscrivendo un accordo "Exchange for Physical" (EFP). Con questo accordo, ove le due parti coinvolte hanno assunto posizione simmetrica sullo stesso futures, si sottoscrive un contratto bilaterale specificando le condizioni relative alla consegna fisica del bene. A questo punto, le due parti comunicano alla camera di compensazione le quantità ed i prezzi su cui si sono accordati, ed i contratti futures sono considerati terminati secondo le condizioni dell'EFP.

1.3 - Attori sul mercato: "hedgers", speculatori e arbitraggisti

Come già illustrato precedentemente, il mercato dei derivati su commodities nasce per permettere agli agricoltori di vendere i loro raccolti a semina appena avvenuta, in modo da garantirsi un'entrata certa e indipendente dalle condizioni presenti sul mercato al futuro tempo di raccolta. Lo scopo era dunque quello di cautelarsi dal rischio delle variazioni di prezzo, un'attività di "hedging" che dà la qualifica di "hedger" a chiunque entri sul mercato con questo fine.

Gli "hedgers" raramente riescono ad eliminare completamente il rischio, trovandosi a dover affrontare il "basis risk", rappresentato essenzialmente dalla differenza tra il prezzo spot della commodity "hedgeata" ed il prezzo del futures:

$$Basis_{t,T} = Spot_t - F^T(t)$$

Il “basis risk” risulta diverso da zero nel caso in cui il prezzo spot e il prezzo futures presentino variazioni di ammontare differente nel corso del tempo, e non convergano a T. Questo fenomeno può essere causato, ad esempio, dal fatto che il sottostante del contratto futures non è la stessa commodity fonte di rischio (es. una società di autotrasporti che vuole cautelarsi dal rischio di aumento dei prezzi dei carburanti acquista contratti futures sul petrolio).

È inoltre possibile definire il “basis risk” come varianza della base:

$$\sigma^2\left(S_t - F^T(t)\right) = \sigma^2(S_t) + \sigma^2\left(F^T(t)\right) - 2\rho\sigma(S_t)\sigma(F^T(t))$$

ove ρ rappresenta il coefficiente di correlazione tra il prezzo spot e il prezzo futures

$$\rho = \frac{\sigma(S_t,\ F^T(t))}{\sigma(S_t)\sigma(F^T(t))}$$

Il “rischio di base” è uguale a zero se prezzo spot e prezzo futures mostrano identica varianza ed il loro coefficiente di correlazione è uguale a 1, ad indicare massima correlazione positiva.

È infine possibilità ricavare una misura di quanto effettivamente l’utilizzo di contratti futures permetta di proteggersi dal rischio relativo alla commodity in esame:

$$h = 1 - \frac{\sigma^2(Basis)}{\sigma^2(S_t)}$$

Maggiormente h assume un valore vicino a uno, maggiormente la pratica di “hedging” è efficace.

Il mercato delle commodities non è però rimasto quello degli esordi e nuovi attori hanno fatto la loro comparsa su questo palcoscenico.

Sono comparsi gli speculatori, agenti economici totalmente esposti ai movimenti dei prezzi delle commodities, al fine di generare dei profitti. La loro posizione, sia essa di acquisto o di vendita (anche allo scoperto[9]), dipende dalla loro previsione dell’andamento nei prezzi nel futuro. Naturalmente, una previsione di rialzo porterà ad assumere una posizione lunga (d’acquisto), mentre una previsione di ribasso porterà all’assunzione di una posizione corta (di vendita).

[9] Scoperto: vendita di titoli non direttamente posseduti dal venditore.

La liquidità del mercato è generata dall'azione combinata di "hedgers" e speculatori.

Terzo e ultimo attore principale del mercato di derivati è l'arbitraggista, colui che tenta di generare un gran numero di profitti di piccola entità comprando strumenti nel mercato spot e vendendoli nel mercato finanziario, e viceversa, sfruttando l'eventuale piccola differenza tra il prezzo spot e il prezzo futures. Le opportunità di arbitraggio durano per breve tempo, poiché l'acquisto di uno strumento sotto-prezzato porta ad un aumento del prezzo dello strumento stesso fino al raggiungimento di quello che il mercato vede come "prezzo equo", ove domanda e offerta si incontrano.
Il valore di un contratto futures viene stabilito seguendo la condizione di non arbitraggio:
Per ogni portafoglio d'investimento P:

$$\begin{cases} V_P(0) = 0 \\ V_P(t) \geq 0 \; in\ qualunque\ stato\ del\ mondo \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad V_P(t) = 0$$

Se non esiste alcuna opportunità di arbitraggio, un portafoglio che abbia un valore iniziale nullo e sia completamente privo di rischio avrà un valore al tempo $t > 0$ pari a zero.
Intuitivamente, partendo da una ricchezza iniziale nulla e senza correre alcun rischio, non è possibile generare alcun profitto.

1.4 - Caratteristiche del mercato dei contratti futures

L'elevata liquidità del mercato, unita alla trasparenza dei prezzi e al fatto che le possibilità di arbitraggio abbiano una durata molto limitata nel tempo, rende possibile la così detta "price discovery", la scoperta dei prezzi.

La curva dei prezzi forward, infatti, viene continuamente controllata da tutti i partecipanti del mercato, poiché solitamente è un buon indicatore di quello che sarà l'andamento dei prezzi spot nel futuro.
È possibile scrivere, sotto l'ipotesi di aspettative razionali[10]:

$$f^T(t) = E(S(T)|I_t)$$

dove $E(.)$ indica la funzione di "valore atteso", l'operatore "|" il condizionamento e I_t tutta l'informazione disponibile al tempo t.
Sia i prezzi forward/futures che i prezzi spot riflettono piuttosto accuratamente la domanda e l'offerta globali, siano queste ultime quelle correnti o quelle attese nel futuro.
Variazioni di domanda e offerta portano conseguentemente a variazioni delle scelte strategiche delle società che lavorano a stretto contatto con le commodities, soprattutto per quel che riguarda le riserve di magazzino: ad un elevato livello futuro di domanda per una commodity (quindi per un prezzo forward/futures in rialzo) corrisponderà la decisione di stoccare e immagazzinare grandi quantità della commodity, mentre le riserve saranno quantitativamente molto più piccole in caso di un basso livello di domanda del bene.
Il potere predittivo dei futures sembra essere potente a tal punto da aver portato alcuni studiosi a teorizzare che il loro mercato sia principalmente un luogo di scambio di informazioni piuttosto che di prodotti, ove i "traders" meno informati ricevono le aspettative dei futuri prezzi spot da quelli che dispongono di maggiori informazioni. A sua volta la comparsa quotidiana di nuove informazioni ha forte impatto sui prezzi dei contratti futures: il mercato delle commodities agricole, ad esempio, può venire completamente destabilizzato dall'arrivo di news negative legate alle condizioni meteorologiche futures.
Vi sono casi in cui l'uguaglianza precedente non è mantenuta.
Accade che

$$f^T(t) > E(S(T)|I_t)$$

[10] Supponendo che le aspettative siano razionali si ipotizza che la collettività di individui utilizzi le informazioni a sua disposizione in maniera efficiente, senza commetter errori nell'elaborazione delle aspettative riguardanti le variabili economiche.

nel caso in cui i compratori di contratti forward/futures sono così avversi al rischio che preferiscono pagare più del valore atteso del prezzo spot futuro pur di assicurarsi con sicurezza la commodity nel futuro.

In caso contrario, i compratori percepiscono che si presenterà un aumento futuro dell'offerta del bene, che le aspettative odierne tendono a sovrastimare il prezzo spot futuro e quindi intendono pagare meno di quanto pagherebbero seguendo l'uguaglianza.

La "teoria della normal backwardation" enuncia che i prezzi dei futures sono, generalmente, minori dell'aspettativa dei prezzi spot futuri, poiché è necessario che questi ultimi superino i primi dell'ammontare che il produttore è disposto a sacrificare pur di proteggere se stesso dalle variazioni di prezzo. Il limite maggiore di questa teoria è quello di considerare come unica posizione assumibile dagli "hedgers" quella di tipo corto, il che la rende, alla luce delle condizioni odierne del mercato, piuttosto obsoleta.

Nel 1933, il Professor Holbrook Working, docente di economia e statistica alla Stanford University, ha elaborato la "theory of storage", teorizzando che le differenze riscontrabili tra prezzi spot e prezzi futures dipendano dalle ragioni che spingono gli agenti economici a detenere o no scorte di prodotti. Al fine di rappresentare i vantaggi direttamente correlati alla proprietà di un bene fisico, il Professor Working ed il collega Nicholas Kaldor definiscono il concetto di "convenience yield", come l'insieme dei benefici che ricadono sul proprietario della commodity fisica ma che non ricadono invece sul possessore di un contratto derivato sulla stessa.

Gli economisti Brennan e Telser definirono il "convenience yield" come una sorta di "timing option" sulla commodity, poiché il detenerla fisicamente permette di immetterla sul mercato quando i prezzi spot sono elevati e di ritirarla quando si abbassano, aspettando congiunture economiche più propizie. Mentre molti studiosi lo considerano una quantità assolutamente casuale, altri lo vedono come una variabile endogena fortemente dipendente dal livello delle scorte del bene.

Proprio queste ultime sono state analizzate da alcuni scienziati per tentare di spiegare la volatilità dei prezzi spot. Fama e French osservarono, in uno studio del 1987 che coinvolgeva metalli, legname e bestiame, che la variabilità dei prezzi fosse inversamente proporzionale al livello di scorte disponibili. William e Wright analizzarono alcune commodities agricole e notarono come la variabilità aumentasse regolarmente, ogni anno, nel periodo che andava da un raccolto a quello successivo. Geman ed Nguyen si occuparono invece dei fagioli di soia, e giungono alle stesse conclusioni di Fama e French.

Questa relazione inversa è osservabile facilmente nel caso del petrolio: ogni qual volta le stime delle riserve mondiali vengono riviste verso il basso, la volatilità del prezzo ed il prezzo stesso del petrolio aumentano considerevolmente.

È importante non sottovalutare quanto appena letto: nel mercato delle commodity prezzi e volatilità sono correlati positivamente, mentre nel mercato azionario e obbligazionario la loro correlazione è, come bene noto, negativa. Anche la volatilità dei prezzi forward/futures presenta una correlazione negativa rispetto al tempo prima della scadenza: futures a un mese hanno prezzi più volatili di contratti dello stesso tipo a scadenza più lunga. Questa peculiarità, chiamata "effetto Samuelson", è spiegata dal fatto che l'arrivo di notizie ha impatto immediato sui prezzi forward di breve periodo mentre quelli di lungo periodo rimangono stabili fino a che non intervengono aggiustamenti nella produzione (aggiustamenti che avvengono solitamente poco prima della scadenza del contratto futures).

Caratteristica comune ad un gran numero di commodities differenti è l'alta volatilità dei prezzi, dovuta alle cause più disparate: le condizioni meteorologiche, i costi di magazzino, i costi di consegna, l'alta deperibilità dei prodotti, il fatto che alcune commodities non siano continuamente prodotte, la disponibilità del bene a livello mondiale, ecc.

1.5 - Importanti relazioni nel mercato delle commodities

1.5.1 - Relazione spot-forward

Alla luce di quanto appena introdotto, è possibile affinare ulteriormente la relazione spot-forward. Anteponendo l'ipotesi di totale mancanza di possibilità di arbitraggio, è possibile enunciare la relazione che lega il prezzo a t del contratto forward con scadenza T ed il prezzo spot a t:

$$f^T(t) = S(t)e^{(r-y)(T-t)}$$

ove r indica il tasso d'interesse per la capitalizzazione continua relativo al periodo $T-t$ ed y indica il "convenience yield" relativo allo stesso periodo. È necessario che sia r sia y siano costanti per tutti il periodo temporale a cui si riferiscono. Il "convenience yield" qui utilizzato è indicato come un tasso ed è espresso come differenza tra l'effettivo beneficio portato al proprietario della commodity ed i costi di detenzione della stessa.

Per comprenderne meglio il concetto, è interessante analizzare la nuova relazione spot-forward nel caso azionario, sia privo di pagamento di dividendi sia con la corrispondenza degli stessi.

Nel primo caso, quello di un'azione che non paga alcun tipo di dividendo, la relazione spot-forward sarà pari a:

$$f^T(t) = S(t)e^{r(T-t)}$$

Essa è giustificabile applicando il principio di non arbitraggio nella costruzione alla data t di una posizione P da mantenere fino al tempo T.

	t	T
Acquisto azione S	$-S(t)$	Consegna
Prestito per finanziare l'acquisto	$+S(t)$	$-S(t)e^{r(T-t)}$
Vendita contratto forward, con sottostante l'azione S e scadenza a T	-	$+f^T(t)$

La somma dei flussi di cassa alla data t è pari a zero, così come sono uguali a zero i cash flows nel periodo $T-t$. Alla data T, l'ammontare del prestito viene restituito assieme agli interessi e l'azione è consegnata al compratore del contratto forward, che paga l'ammontare stabilito precedentemente.

La futura evoluzione della posizione è interamente conosciuta alla data iniziale e, poiché il valore iniziale di P è pari a zero e c'è assenza di rischio, il suo valore finale deve essere pari a zero (nessuna possibilità di arbitraggio).

Nel secondo caso, quello di un'azione che paga dividendi, varrà

$$f^T(t) = S(t)e^{(r-g)(T-t)}$$

con g ad indicare il tasso di dividendo.

La giustificazione è simile al caso privo di dividendi:

	t		T
Acquisto $e^{g(T-t)}$ quote dell'azione S	$-e^{-g(T-t)}S(t)$	Reinvestimento in S dei dividendi pagati	Ottengo un'intera azione S
Prestito per finanziare l'acquisto	$+e^{-g(T-t)}S(t)$		$-e^{(r-g)(T-t)}S(t)$
Vendita contratto forward, con sottostante l'azione S e scadenza a T	-		$f^T(t)$

La somma dei flussi di cassa a t è nuovamente uguale a zero, dunque il valore finale della posizione sarà nullo. I dividendi pagati sono continuamente reinvestiti in ulteriori quote dell'azione: in questo modo a T si giunge al possesso di un'intera azione S.

Il caso relativo alle commodities, com'è immediato osservare, è molto simile a quest'ultimo: la sostituzione del "convenience yield" al "dividend yield" è l'unico elemento a differenziarli.

Considerando tassi lineari e non continui, la relazione è esprimibile come

$$f^T(t) = S(t)[1 + (r - y)(T - t)]$$

Scomponendo poi il "convenience yield" secondo la sua definizione di differenziale tra il beneficio derivante dalla proprietà della commodity (y_1) ed i costi di magazzino (c)

$$y = y_1 - c$$

la relazione spot-forward può essere riscritta nel modo seguente

$$f^T(t) = S(t)[1 + r(T - t) + c(T - t) - y_1(T - t)]$$

$r(T - t)$ è il costo in cui si incorre per finanziare l'acquisto della commodity

$c(T - t)$ è il costo di magazzino per il periodo $T - t$

$y_1(T - t)$ è il beneficio puro della proprietà della commodity

Si osserva che la variabile y_1 compare nell'equazione con segno negativo, poiché il compratore del contratto forward non beneficia della proprietà del sottostante. Tornando infine ai tassi continui

$$f^T(t) = S(t)e^{(r+c-y_1)(T-t)}$$

Nell'eventualità in cui $r - y < 0$ (ovvero $r + c < y_1$) ci si trova in una situazione di "backwardation", dove i prezzi forward sono minori dei prezzi spot, a causa di bassi costi di magazzino, bassi tassi d'interesse, e alti "convenience yields". La curva dei prezzi forward risulta funzione decrescente della scadenza dei contratti.

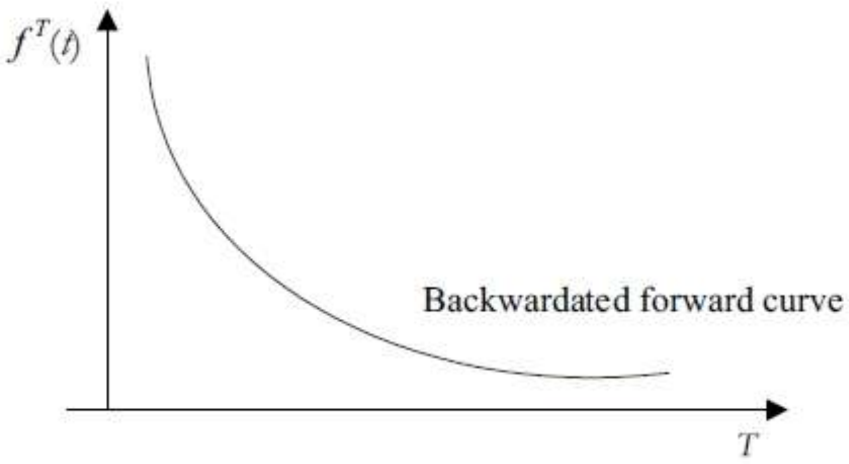

Figura 3 – Curva dei prezzi forward in situazione di "backwardation"

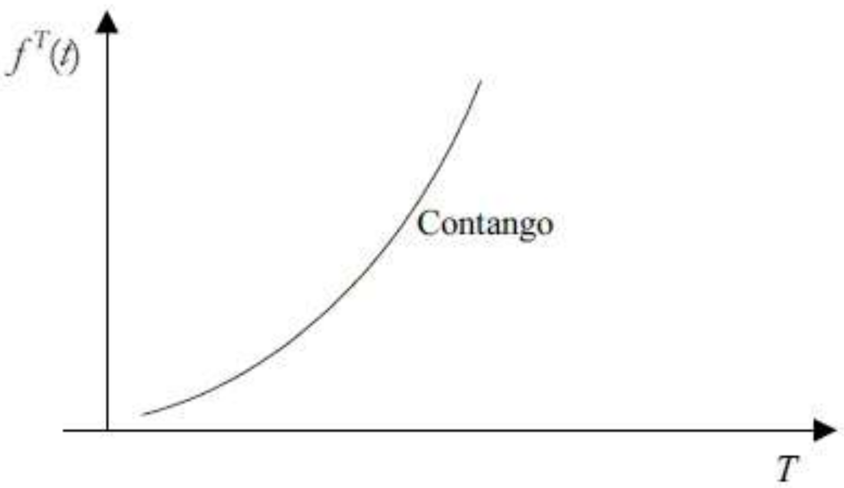

Figura 4 – Curva dei prezzi forward in situazione di "contango"

Nell'eventualità contraria, quella che mostra $r - y > 0$ (ovvero $r + c > y_1$) si parla di "contango" e i prezzi forward sono maggiori di quelli spot. Questa è la condizione che solitamente accompagna una commodity stoccabile e non deperibile.

1.5.2 - Relazione forward-futures

1.5.2.1 – Fattori di sconto e tassi zero

Il fattore di sconto indica numericamente il valore attuale di un'unità di valuta futura, ed è sicuramente uno dei concetti più importanti nell'ambito della finanza quantitativa.

$$D(0, t) = Valore\ attuale(1\ pagato\ al\ tempo\ t)$$

Dato un tasso d'interesse *r*, il fattore di sconto in capitalizzazione continua è

$$D(0, t) = e^{-r \cdot T_t}$$

ove T_t si riferisce al tempo trascorso tra la data odierna e *t*, espresso in frazioni d'anno sulla base dell'anno solare[11].

In caso di tassi d'interesse positivi, vale sempre la relazione

$$D(t, t_2) < D(t, t_1) \quad con \quad t_2 > t_1$$

Ovviamente

$$D(0,0) = D(t, t) = 1$$

Qualora venga omessa l'indicazione del tempo di valutazione del fattore di sconto, si suppone che esso corrisponda alla data odierna:

$$D(t) = D(0, t)$$

Introdotto il "discount factor", è ora possibile parlare del tasso zero, strettamente legato ad esso.

Lo "zero rate" è quel tasso d'interesse che, usato al fine di capitalizzare per il periodo $(0, t)$ il fattore di sconto $D(t)$, fa ottenere un montante pari a 1.

[11] La convenzione usata, relativa al "day count", è "Actual/365 fixed". La frazione d'anno viene sempre calcolata, indipendentemente che l'anno sia bisestile, come $\frac{giorni\ trascorsi\ tra\ t_0\ e\ t}{365}$.

$$D(t)e^{z(t)\cdot T_t} = 1$$

Con qualche semplice passaggio algebrico, è possibile esprimere fattore di sconto e tasso zero l'uno in funzione dell'altro (e viceversa).

$$D(t) = e^{-z(t)\cdot T_t}$$

$$z(t) = -\frac{\ln(D(t))}{T_t}$$

Sia la definizione di "discount factor" sia quella di "zero rate" impone la totale assenza di rischio creditizio e di possibilità di arbitraggio, ammettendo l'esistenza di un'unica curva riskless giornaliera in grado di descriverli. In caso di due o più curve, infatti, si osserverebbero facili opportunità di arbitraggio, in quanto investimenti (privi di rischio) diversi sarebbero soggetti a tassi zero diversi, e porterebbero quindi a risultati finali differenti. A quel punto sarebbe sufficiente prestare soldi al tasso più alto finanziandosi, nel contempo, al tasso più basso, per ottenere un guadagno potenzialmente infinito.

1.5.2.2 – La relazione vera e propria

Assumendo che i tassi di interesse non siano stocastici[12] e che non vi sia alcun rischio di insolvenza, è possibile asserire che prezzi forward e prezzi futures coincidono.

La relazione spot-forward nel caso di una commodity stoccabile, qualunque sia la natura del tasso d'interesse, può essere scritta come

$$f^T(t) = \frac{S(t)}{D(t,T)}$$

ove $D(t,T)$ indica il fattore di sconto privo di rischio valutato in t e riferito al tempo T.

Si analizzi ora la situazione relativa ai contratti futures.

Al tempo t si entra in una posizione lunga su $1/D(t,t+1)$ contratti futures con scadenza al tempo T. La posizione verrà chiusa al tempo $t+1$ ed i profitti

[12] Stocastico: aleatorio, casuale.

ottenuti, pari a $1/D(t,t+1)\,[F^T(t+1)-F^T(t)]$, saranno investiti giornalmente fino alla data *T*, ottenendo alla fine

$$1/D(t,t+1)\,[F^T(t+1)-F^T(t)]\cdot 1/D(t+1,t+2)\cdot \dots \cdot 1/D(T-1,T)$$

Al tempo $t+1$ si entra in una posizione lunga su $1/[D(t,t+1)\cdot D(t+1,t+2)]$ contratti futures con scadenza al tempo T. La posizione verrà nuovamente chiusa dopo un periodo e i profitti ottenuti, pari a $1/[D(t,t+1)\cdot D(t+1,t+2)][F^T(t+2)-F^T(t+1)]$, saranno investiti quotidianamente fino al tempo *T*, fornendo una ricchezza finale di

$$1/[D(t,t+1)\cdot D(t+1,t+2)][F^T(t+2)-F^T(t+1)]\cdot$$
$$\cdot\, 1/D(t+2,t+3)\cdot \dots \cdot 1/D(T-1,T)$$

Si ripetono gli investimenti precedenti fino al tempo $T-1$, in modo da ottenere a *T* una posizione aggregata, costituita dalla somma di ogni singola posizione:

$$\frac{1}{D(t,t+1)\cdot \dots \cdot D(T-1,T)}\cdot [F^T(T)-F^T(T-1)+\cdots+F^T(t+1)-\ F^T(t)]$$
$$=$$
$$\frac{F^T(T)-F^T(t)}{D(t,t+1)\cdot \dots \cdot D(T-1,T)}$$

Infine, si presta ogni giorno una somma di denaro $F^T(t)$, al tasso zero corrispondente, fino alla data T, in modo da ottenere al termine il valore di

$$\frac{F^T(t)}{D(t,t+1)\cdot \dots \cdot D(T-1,T)}$$

La posizione globale avrà quindi un valore finale di

$$\frac{F^T(T)}{D(t,t+1)\cdot \dots \cdot D(T-1,T)}$$

In caso di tassi d'interesse deterministici, le quantità

$$D(t,t+1),\ \dots,\ D(T-1,T)$$

sono note al tempo iniziale t e grazie al principio di non arbitraggio vale la relazione

$$D(t,T)=D(t,t+1)\cdot \dots \cdot D(T-1,T)$$

Poiché, inoltre, la relazione spot-forward ricorda che $F^T(T)=S(T)$, è dunque possibile indicare il valore della posizione finale come $S(T)/D(t,T)$, posizione che richiede un investimento iniziale di $F^T(t)$.

Si consideri ora una seconda posizione, di acquisto al tempo t di $D(t,T)$ quote di un'azione che non paga dividendi e di mantenimento delle stesse fino alla data T.
Questa posizione avrà un valore finale pari a $S(T)/D(t,T)$ e richiede un investimento iniziale di $S(t)/D(t,T)$.
Poiché le due posizioni hanno lo stesso valore finale $S(T)/D(t,T)$ in ogni condizione, è necessario che abbiano anche lo stesso valore iniziale, secondo il ben noto principio di non arbitraggio:

$$F^T(t) = \frac{S(t)}{D(t,T)} = f^T(t)$$

È dunque dimostrato che, sotto determinate condizioni, prezzi forward e prezzi futures coincidono.

Utilizzando le nuove informazioni a disposizione è possibile un ulteriore raffinamento della relazione spot-forward. Supponendo un convenience yield costante, la relazione diventa:

$$f^T(t) = \frac{S(t)e^{-y(T-t)}}{D(t,T)}$$

1.6 – Casualità e rendimenti

Sebbene i prezzi spot e i prezzi forward odierni siano conosciuti, essi non permettono in alcun modo di prendere decisioni strategiche riguardanti le dinamiche futures dei prezzi del bene. E' quindi necessario provare a modellare prezzi spot e prezzi forward futuri, che risultano essere né più né meno che totalmente casuali.
I prezzi spot di una commodity dal tempo *t* in avanti costituiscono un processo stocastico $S(t)$, di cui andrà ricercata un'appropriata struttura matematica, consistente con le sue dinamiche reali. I parametri che andranno a costituire le

fondamenta del modello dovranno carpire la maggior informazione possibile dal mercato odierno, rimanendo però in limitato numero e senza presentare grosse variazioni dall'oggi al domani. Qualunque modello venga presentato deve inoltre far fede al fondamentale principio di non arbitraggio.

Il presente lavoro non si occuperà di illustrare i complessi modelli matematici di cui fa cenno poco sopra, ma si limiterà ad analizzare alcune delle peculiarità dei prezzi e dei rendimenti delle commodities.

Contrariamente ai prezzi presenti sul mercato azionario, i prezzi delle materie prime presentano raramente trends di lungo periodo, nonostante non siano certo rare grandi variazioni nel breve periodo. Caratteristica interessante è la "mean-reversion", il ritorno verso il valore medio: i prezzi hanno la tendenza a "rientrare" verso i valori che assumono usualmente, dopo brevi periodi di crescita o di crollo, dovuti ad esempio a variazioni della domanda e/o dell'offerta di un bene.

Altre caratteristiche dei prezzi delle commodities possono essere facilmente dedotte analizzando i primi quattro momenti della distribuzione dei rendimenti degli stessi.

Si ricordi che il rendimento al tempo *t* è definito come

$$R_t = ln\frac{S_t}{S_{t-1}} \cong \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

e la media di una serie di rendimenti non è altro che

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{T} R_i}{T}$$

La varianza, come altrimenti noto, è pari a

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{T} \frac{(R_i - \bar{R})^2}{T}$$

e la sua radice quadrata, σ, è detta deviazione standard.

Quest'ultima, utilizzata come misura della volatilità dei rendimenti, assume valori molto più alti sul mercato delle commodities che in qualunque mercato di altro tipo, poiché i fattori che influenzano l'andamento dei prezzi sono piuttosto mutevoli (basti pensare alle condizioni meteorologiche).

L'asimmetria, il momento terzo, definito come

$$\gamma = \frac{E[(R-\bar{R})^3]}{E[(R-\bar{R})^2]^{\frac{3}{2}}}$$

non fornisce informazioni generali sui rendimenti, poiché ogni commodity presenta risultanti differenti, che non permettono di giungere ad alcuna conclusione.

La curtosi, il momento quarto,

$$k = \frac{E[(R-\bar{R})^4]}{\sigma^4}$$

assume per ogni commodity un valore maggiore di 3 (in alcuni casi anche molto maggiore). Le loro funzioni di densità si possono definire leptocurtiche, poiché presentano code "più spesse" se confrontate con quelle della normale standardizzata, lasciando più spazio alla probabilità di accadimento di eventi estremi.

Capitolo 2 – Le misure di rischio

Il secondo capitolo di questo lavoro si occuperà di illustrare ed analizzare le più diffuse misure di rischio utilizzate in finanza, per poi soffermarsi sui rischi prettamente relativi alle commodities. Prima di tutto questo, però, è necessario definire cosa sia il rischio.

rischio [rì-schio] *ant.* risco s.m. (pl. –*schi*) Possibilità di pericolo, di danno materiale o morale, dipendente da situazioni spesso imprevedibili.

Questa è la definizione che è possibile leggere su qualsiasi dizionario italiano in commercio o consultabile online[13]. Chiara e concisa, come si confà a manuali da pura consultazione, non rende certo giustizia alla complessità del mondo che circonda il rischio, sia per quanto riguarda gli investimenti che, più in generale, l'ambiente della finanza.

E' innanzitutto possibile separare il rischio in sei grandi categorie:

- rischio di compliance, legato alla violazione di norme, regole e standard, siano essi stabiliti da entità esterne (Stati, banche, ecc) o interne (consiglio d'amministrazione, ecc) all'impresa;
- rischio operativo, collegato alle perdite subite in seguito ad errori umani, frodi (interne ed esterne all'impresa), avarie e guasti dei sistemi produttivi, scarsi controlli;
- rischio creditizio, dovuto all'inadempienza di una delle controparti agli obblighi contrattuali, insolvenza parziale o totale;
- rischio di mercato, derivante da variazioni dei fattori di rischio di mercato, quali tassi d'interesse, tassi di cambio, volatilità dei prezzi, ecc;

[13] Questa particolare definizione di "rischio" ha come fonte il dizionario "Hoepli" online.

- rischio di liquidità, definito come il rischio che l'impresa non sia in grado di rispettare i propri oneri di pagamento, a causa del difficoltoso processo di reperimento di fondi o di liquidazione di attività;
- rischio reputazionale, legato a tutti i precedenti, poiché il manifestarsi di uno degli eventi sopraelencati porta ad un calo della credibilità dell'impresa agli occhi dei potenziali clienti.

Quando è ben chiaro quali tipi di rischio si stanno correndo, è possibile decidere se cercare di sfruttarli a proprio favore oppure tentare di eliminarli. I "risk manager" optano per la prima opzione, poiché è necessario che corrano un rischio per poter raggiungere elevati risultati positivi nelle loro attività d'investimento. I "risk controller", invece, optano per la seconda scelta: sono pagati per eliminare il rischio o quantomeno per cercare di ridurlo al minimo.

Un buon investitore dovrebbe ricercare un giusto equilibrio tra le due posizioni: essere troppo spregiudicati lo porterà quasi sicuramente alla bancarotta, così come essere troppo conservativi lo porterà a risultati di secondaria importanza. Regola fondamentale è chiedersi continuamente se i risultati che si stanno ottenendo sono proporzionati al rischio che si sta correndo. Ovviamente, non tutti gli investitori compiranno le medesime scelte d'investimento, poiché ognuno di essi seguirà il proprio profilo di rischio, che generalmente è caratterizzato da una certa avversione al rischio.

2.1 – Volatilità: varianza e deviazione standard

Il rischio può essere misurato sia storicamente sia in prospettiva futura.

Il rischio storico, quello ex-post, permette di valutare quanto un investimento sia stato rischioso nel passato, mentre il rischio futuro, ex-ante, permette di stimare quella che sarà la rischiosità dell'investimento stesso in un futuro più o meno prossimo.

La misura di rischio più diffusa e conosciuta è la variabilità, già presente in diverse occasioni nel primo capitolo del presente lavoro.

Essa rappresenta la dispersione dei rendimenti dal rendimento medio, ed è misurata con strumenti anch'essi già affrontati precedentemente[14], quali la varianza e la deviazione standard. Maggiore è il valore assunto da questi strumenti, maggiore è il rischio che si corre.

La deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{T}(R_i - \bar{R})^2}{T}}$$

è solitamente calcolata su base annuale, ma può essere calcolata qualunque sia la periodicità dei dati in esame e poi eventualmente trasformata in seguito, secondo l'equazione $\sigma_y = \sqrt{t} \cdot \sigma$, ove t rappresenta il numero di osservazioni annuali (es. la deviazione standard calcolata su base mensile può essere trasformata nel corrispettivo annuale moltiplicandola per $\sqrt{12}$).

2.2 – "Sharpe ratio", rendimento "risk-adjusted" di Modigliani & Modigliani e rendimento differenziale

Considerato che gli investitori sono esseri pensanti, a parità di rischio sceglieranno l'investimento che garantisce un rendimento maggiore, così come a parità di rendimento sceglieranno quello che mostra un rischio minore.

Lo "Sharpe ratio" ci permette di valutare numericamente quella che viene definita "ricompensa per la variabilità", ovvero la parte di rendimento imputabile al rischio a cui dovrei rinunciare nel caso in cui il mio investimento fosse completamente sicuro (riskless).
È naturale che gli investitori preferiranno gli investimenti posizionati in alto a sinistra sul grafico, quelli caratterizzati da alti rendimenti e da basso rischio.
Lo "Sharpe ratio", definito numericamente come

[14] Vedi 1.6, "Casualità e rendimenti"

$$SR = \frac{R_{investimento} - r_f}{\sigma_{investimento}}$$

rappresenta il coefficiente angolare delle semirette visibili nel grafico successivo (semirette che hanno come punto d'inizio il tasso privo di rischio, indicato come r_f) ed indica quanto l'investimento è in grado di combinare efficientemente rendimento e rischio. Maggiore è il valore di *SR*, migliore è l'investimento.

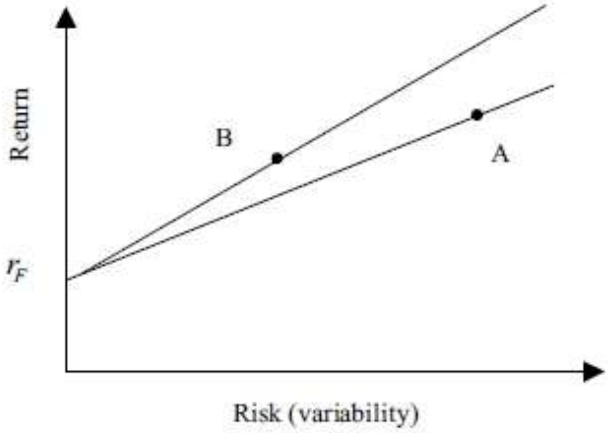

Figura 5 – Sharpe ratio

Caso particolare è quello di "Sharpe ratio" negativi, dovuti ad investimenti con rendimenti al di sotto del tasso "risk-free" o addirittura negativi. In questi casi, e solamente in questi, è preferibile che l'investimento abbia un'alta volatilità: a parità di rendimento, ad una maggiore deviazione standard corrisponde un minore valore del quoziente.

Sfruttando l'informazione fornita da questo indicatore, è possibile calcolare il rendimento "risk-adjusted" di vari investimenti, ovvero il loro rendimento ad un determinato livello di rischio, definito come σ_m.

Graficamente, partendo dal livello σ_m sull'asse delle ascisse e tracciando un segmento verticale verso l'alto, si osserva nei punti di intersezione tra il segmento appena tracciato e le semirette rappresentanti gli "Sharpe ratios", il rendimento degli investimenti a quel determinato livello di rischiosità.

Numericamente, si indica il rendimento "risk-adjusted" di Modigliani & Modigliani come

$$M^2 = R_{inv} + SR \cdot (\sigma_m - \sigma_{inv})$$

o, alternativamente

$$M^2 = r_f + \left(R_{inv} - r_f\right) \cdot \frac{\sigma_m}{\sigma_{inv}}$$

Il rendimento in eccesso rispetto ad un investimento di riferimento (definito "benchmark") sarà invece pari alla semplice differenza tra i due rendimenti,

$$M^2{}_{eccesso} = M^2 - R_{bench}.$$

È infine possibile attuare una correzione al rendimento del "benchmark", sulla base del rischio dell'investimento stesso, per poter poi calcolare il rendimento differenziale.

La correzione del rendimento viene effettuata seguendo la formulazione

$$R'_{bench} = r_f + \left(\frac{R_{bench} - r_f}{\sigma_m}\right) \cdot \sigma_{inv}$$

Dopo di che è immediato il calcolo del rendimento differenziale, analogo a quello del rendimento in eccesso

$$RD = R_{inv} - R'_{bench} = R_{inv} - r_f - \left(\frac{R_{bench} - r_f}{\sigma_m}\right) \cdot \sigma_{inv}$$

Per effettuare confronti tra investimenti differenti è consigliabile utilizzare l'$M^2{}_{eccesso}$ piuttosto che l' RD, poiché quest'ultimo necessita del calcolo di tanti R'_{bench} quanti sono gli investimenti da confrontare, mentre il primo è direttamente applicabile.

2.3 – L'analisi di regressione

E' possibile ottenere ulteriori informazioni sul rischio realizzando un grafico a dispersione dei rendimenti di un investimento e di un "benchmark" (rispettivamente sull'asse delle ordinate e delle ascisse), per poi applicare il metodo dei "minimi quadrati" al fine di definire la retta di regressione[15]

$$R_{inv} = \alpha_R + \beta_R \cdot R_{bench} + \varepsilon_R$$

ove α_R rappresenta l'intercetta della retta con l'asse delle ordinate, β_R rappresenta il coefficiente angolare della retta ed ε_R è il termine d'errore[16].

β_R può essere calcolato come

$$\beta_R = \frac{\sum_{i=1}^{T}[\left(R_{inv}^{(i)} - \bar{R}_{inv}\right) \cdot \left(R_{bench}^{(i)} - \bar{R}_{bench}\right)]}{\sum_{i=1}^{T}(R_{bench}^{(i)} - \bar{R}_{bench})^2}$$

Come visto nel paragrafo precedente, è maggiormente interessante a fini analitici considerare solamente quella parte dei rendimenti, siano essi relativi all'investimento o al benchmark, che eccedono il tasso privo di rischio. Viene qui in aiuto il noto "Capital Asset Pricing Model" (CAPM), che permette di esprimere la retta di regressione come

$$R_{inv} - r_f = \alpha + \beta \cdot \left(R_{bench} - r_f\right) + \varepsilon$$

In questo modello, α e β acquisiscono ruoli fondamentali per l'analisi del rischio.

L'α, detta "alpha di Jensen", rappresenta l'eccesso di rendimento dell'investimento rispetto al tasso "risk-free", il tutto "aggiustato" rispetto al rischio rappresentato da β.

$$\alpha = R_{inv} - r_f - \beta \cdot (R_{bench} - r_f)$$

È immediato notare la similarità tra la precedente equazione e quella del rendimento differenziale *RD*, affrontata nel paragrafo 2.1.1.

Il β è indicatore del rischio sistematico, ovvero quel rischio dipendente dai trends di mercato e dalla situazione economica generale presenti nel momento in cui si effettua l'investimento.

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{T}[(R_{inv}^{(i)} - r_f^{(i)} - \bar{R}_{inv} - \bar{r}_f) \cdot (R_{bench}^{(i)} - r_f^{(i)} - \bar{R}_{bench} - \bar{r}_f)]}{\sum_{i=1}^{T}(R_{bench}^{(i)} - r_f^{(i)} - \bar{R}_{bench} - \bar{r}_f)^2}$$

---

[15] Il metodo dei minimi quadrati è una tecnica di ottimizzazione improntata alla definizione di una funzione (nel caso più semplice, una retta) in grado di minimizzare la somma dei quadrati delle distanze tra i dati presenti nel grafico a dispersione e la funzione medesima. In inglese prende il nome di "Ordinary Least Squares" (OLS).

[16] L'errore è misurato come differenza tra il rendimento realmente osservato e quello ricavabile dall'equazione di regressione.

All'occorrenza, è possibile utilizzare l'equazione di regressione fornita dal CAPM vincolata ai soli rendimenti positivi o negativi, ottenendo, rispettivamente, il β^+ detto "beta toro" ed il β^- detto "beta orso"[17]. Nella costruzione di un ipotetico portafoglio, il desiderio sarà di avere investimenti con un β^+ alto ed un β^- basso, in modo da sfruttare a dovere i periodi di rialzo e di limitare gli effetti negativi dei periodi ribassisti. Si può misurare questo tipo di efficienza del portafoglio tramite il "beta timing ratio", dato dal rapporto tra il beta toro e il beta orso: maggiore è il valore di questo indicatore e più profittevole (per l'investitore) è la reazione del portafoglio alle varie fasi di mercato.

La conoscenza del rischio sistematico può essere ulteriormente approfondita andando ad analizzare la correlazione tra i rendimenti dell'investimento e quelli del benchmark.
La covarianza misura la tendenza di due variabili a muoversi all'unisono.

$$Cov(R_{inv}, R_{bench}) = \frac{\sum_{i=1}^{T}[(R_{inv}^{(i)} - \bar{R}_{inv}) \cdot (R_{bench}^{(i)} - \bar{R}_{bench})]}{T}$$

Una covarianza positiva indica che entrambi i rendimenti evolvono nel tempo nella stessa direzione, una covarianza negativa è indice di un'evoluzione in direzioni opposte, mentre una covarianza nulla comunica incorrelazione.
Per poter confrontare tra loro le correlazioni di due più investimenti con il benchmark, è necessario standardizzare la misura di covarianza, rendendola un indice variabile nell'intervallo [-1; 1]. A tal fine è possibile utilizzare l'indice di correlazione di Pearson

$$\rho_{inv,bench} = \frac{Cov(R_{inv}, R_{bench})}{\sigma_{inv} \cdot \sigma_{bench}}$$

Considerando come investimento di riferimento il mercato stesso, il coefficiente di correlazione di Pearson può essere scritto come

$$\rho_{inv,m} = \frac{Rischio\ sistematico}{Rischio\ totale} = \frac{\beta \cdot \sigma_m{}^{18}}{\sigma_{inv}} = \frac{\sigma_S}{\sigma_{inv}}$$

da cui si può ricavare la relazione esistente tra il β e la correlazione

[17] "Toro" ed "orso" sono espressioni gergali diffuse nel mondo della finanza, atte ad indicare fasi di mercato rialziste (toro) e ribassiste (orso).
[18] Il rischio sistematico, β, viene moltiplicato per la deviazione standard del mercato al fine di ottenere una misura coerente con quella della volatilità.

$$\beta = \rho_{inv,m} \cdot \frac{\sigma_{inv}}{\sigma_m}$$

Volendo esprimere il coefficiente di correlazione di Pearson in termini di varianza, è sufficiente elevare ρ al quadrato, ottenendo il coefficiente di determinazione R^2. Oltre ad indicare quantitativamente quale porzione di varianza dei rendimenti dell'investimento è legata alla varianza dei rendimenti del mercato, esso è un indicatore della qualità della regressione intrapresa: per valori bassi di R^2, tutte le statistiche derivanti dall'applicazione della regressione sono prive di significatività, e non aiutano in nessun modo la valutazione del rischio d'investimento.

In aggiunta al rischio sistematico, è presente in ogni investimento un rischio di tipo specifico, non dipendente dalle condizioni in cui versa il mercato ma caratterizzato solamente dalle qualità degli asset considerati. Rappresentato dalla deviazione standard dell'errore di regressione, σ_ε, è totalmente indipendente dall'altro rischio presente, di modo che il rischio totale dell'investimento è calcolabile come

$$\sigma_{inv} = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_\varepsilon^2}$$

A seguito di questa scomposizione del rischio totale dovuta al modello CAPM, nasce la possibilità di realizzare alcuni indicatori simili allo "Sharpe ratio" e un rendimento M^2 specifico per il rischio sistematico.

Uno dei nuovi indicatori prende il nome di "Treynor ratio", e mantiene lo stesso significato del classico "Sharpe ratio", ovvero quanto l'investimento sia in grado di combinare efficientemente rendimento e rischio (in questo caso il rischio specifico viene ignorato).

$$TR = \frac{R_{inv} - r_f}{\beta}$$

Ne esiste anche una versione modificata, che al denominatore presenta la versione "standardizzata" del rischio sistematico, quella indicata da σ_S.

Altro indicatore realizzabile è l'"appraisal ratio", il "rapporto di valutazione", nient'altro che uno "Sharpe ratio" aggiustato per il rischio sistematico. Esso misura la ricompensa, corretta per il rischio sistematico, legata ad ogni unità di rischio specifico presente nell'investimento.

$$AR = \frac{\alpha}{\sigma_\varepsilon}$$

Per quanto riguarda il rendimento M^2, la sua versione per il β è pari a

$$M^2 = R_{inv} + TR \cdot (1 - \beta) = R_{inv} + TR - \left(R_{inv} - r_f\right) \cdot \frac{\beta}{\beta} = r_f + TR$$

2.4 – Il downside risk: il rischio di subire perdite

Tutte le misure di variabilità finora analizzate tengono conto sia delle variazioni di prezzo/rendimento positive che di quelle negative. Un ipotetico investitore, però, è spaventato solamente dalle seconde, quelle che gli fanno perdere denaro, mentre è sicuramente soddisfatto di vedere il suo investimento colpito dalle prime.
Da queste considerazioni nasce il downside risk, una serie di misure di rischio che tengono in considerazione solamente le variazioni che provocano perdite all'investitore.
La principale di esse è la semi-deviazione standard negativa, che misura la volatilità dei soli rendimenti inferiori al rendimento medio.

$$\sigma_D = \sqrt{\sum_{i=1}^{T} \frac{\min[\left(R_{inv}^{(i)} - \bar{R}_{inv}\right); 0]^2}{T}}$$

Il rendimento medio può essere sostituito da qualunque altra soglia minima si desideri, in base ai propri obiettivi d'investimento.
Anche il downside risk ha la sua versione di "Sharpe ratio", chiamata "Sortino ratio", che misura la ricompensa per unità di rischio downside

$$Sortino\ ratio = \frac{(R_{inv} - soglia)}{\sigma_D}$$

e la sua versione di rendimento M^2. In questo caso il livello di partenza è il downside risk σ_{Dm} relativo al benchmark e nei punti di intersezione tra il segmento verticale corrispondente e le semirette rappresentanti i "Sortino ratios" si osserva il rendimento degli investimenti al livello di rischiosità σ_{Dm}.

$$M_S^2 = R_{inv} + Sortino\ ratio \cdot (\sigma_{Dm} - \sigma_D)$$

È naturalmente possibile calcolare anche la semi-deviazione standard positiva, analogamente alla controparte negativa, indicatore della volatilità favorevole all'investitore.

$$\sigma_U = \sqrt{\sum_{i=1}^{T} \frac{\max[\left(R_{inv}^{(i)} - \bar{R}_{inv}\right); 0]^2}{T}}$$

Sempre in materia di variazioni positive dei rendimenti, si può calcolare, una volta stabilita una determinata soglia, l'eccesso medio di rendimento oltre quest'ultima, tramite lo strumento denominato "upside potential".

$$UP = \frac{\sum_{i=1}^{T} \max[\left(R_{inv}^{(i)} - soglia\right); 0]}{T}$$

Combinando quest'ultimo con la semi-deviazione standard negativa è possibile formare l'"upside potential ratio", al fine di confrontare tra loro le performance di investimenti differenti.

$$UPR = \frac{\sum_{i=1}^{T} \max[\left(R_{inv}^{(i)} - soglia\right); 0]/T}{\sigma_D}$$

Altra applicazione dell'uso combinato di semi-volatilità porta al calcolo dell'indice di asimmetria della volatilità: l'asimmetria sarà positiva nel caso in cui la semi-varianza positiva sia maggiore di quella negativa, negativa nel caso contrario.

$$\gamma_\sigma = \frac{\sigma_U^2}{\sigma_D^2}$$

2.4.1 – Il "Valore a Rischio"

L'analisi della distribuzione delle perdite porta alla definizione di una delle misure di rischio più diffuse ed utilizzate, il "Valore a Rischio".

Il VaR misura, ad un certo livello di confidenza, la potenziale perdita di un investimento in un determinato orizzonte temporale.

Questa misura di rischio ha acquisito man mano importanza nel tempo, ottenendo la sua consacrazione definitiva nel 2004 con la firma da parte delle principali banche mondiali del "Nuovo accordo sui requisiti minimi di capitale", meglio conosciuto come "Basilea II" (dal nome della cittadina svizzera in cui è stato siglato). Entrato in vigore nel 2007, stabilisce che i requisiti minimi patrimoniali delle banche debbano coprire le perdite inattese dovute al:

- rischio di credito, con l'introduzione dell'attribuzione di un rating sia per le banche stesse che per i clienti. Questo indica la qualità della solvenza del soggetto cui è attribuito, ed è stabilito tramite un lavoro combinato di enti interni ed esterni all'istituto di credito;
- rischio operativo, preso in considerazione per la prima volta nella storia da parte delle autorità di controllo;
- rischio di mercato, controllato internamente dalla divisione "Risk Management" della banca.

È proprio quest'ultima tipologia di rischio ad essere collegata al "Valore a Rischio", che deve rispettare le seguenti caratteristiche:

- un livello di confidenza del 99 per cento ($\alpha = 0{,}01$);
- un orizzonte temporale di 10 giorni;
- un'analisi storica basata su almeno un anno di dati.

Volgarmente parlando, il VaR non è altro che il quantile q[19] di ordine α della distribuzione dei rendimenti (con α incluso tra 0 e 1).

q risulta essere l'α-quantile di x (x indica i rendimenti) se

$$\Pr(x < q) \leq \alpha \leq \Pr(x \leq q)$$

Nel caso x presenti una distribuzione continua

$$\Pr(x < q) = \Pr(x \leq q) = F_x(q) \Rightarrow \; q_\alpha(x) = F_x^{-1}(\alpha)$$

ove $F_x(.)$ rappresenta la funzione di ripartizione[20] di x ed $F_x^{-1}(.)$ l'inversa della funzione di ripartizione stessa.

[19] Il quantile rappresenta quel valore che divide la popolazione in due parti caratterizzate da valori minori o uguali e valori maggiori del quantile. Le due parti della popolazione sono proporzionali al livello di significatività α e al suo complementare a 1.

Per definizione, il "Value at Risk" di x ad un livello di significatività α è

$$VaR_\alpha(x) = -q_\alpha(x) = -F_x^{-1}(\alpha)$$

e presenta alcune interessanti proprietà matematiche:

1. Monotonicità

$$x \geq y \Rightarrow VaR_\alpha(x) \leq VaR_\alpha(y)$$

   in particolare

$$x \geq 0 \Rightarrow VaR_\alpha(x) \leq 0$$

2. Omogeneità positiva

$$VaR_\alpha(bx) = b \cdot VaR_\alpha(x) \quad \forall x;\ \forall b \geq 0$$

3. Invarianza alle traslazioni

$$VaR_\alpha(x + c) = VaR_\alpha(x) - c \quad \forall x;\ \forall c \in \mathcal{R}$$

   in particolare

$$VaR_\alpha\big(x + VaR_\alpha(x)\big) = VaR_\alpha(x) - VaR_\alpha(x) = 0$$

4. Consistenza rispetto alla dominanza stocastica del primo ordine[21]

$$x \leq_1 y \Rightarrow VaR_\alpha(x) \geq VaR_\alpha(y)$$

Se x presenta una distribuzione di tipo normale ($x \sim N(\mu, \sigma$^2)) è possibile calcolarne il VaR servendosi dell'inversa della funzione di ripartizione della variabile casuale normale standardizzata ($N_{std}(0, 1)$), della sua media e della sua deviazione standard.

$$VaR_\alpha(x) = -\mu - \sigma \cdot N_{std}^{-1}(\alpha)$$

Neanche uno strumento diffuso e importante come il "Valore al Rischio" è però esente da imperfezioni: innanzitutto non attua alcuna distinzione tra posizioni con differente perdita potenziale massima e, problema ancora maggiore, non è una misura subadditiva[22]. Generalmente, infatti, è valida la relazione

$$VaR_\alpha(x + y) > VaR_\alpha(x) + VaR_\alpha(y)$$

---

[20] Funzione di ripartizione di una variabile casuale X (X rappresenta il risultato di un evento casuale) è la funzione che associa ad ogni valore di x la probabilità che X sia minore o uguale a x.

[21] La dominanza stocastica del primo ordine, $\leq_1$, indica che se Y domina stocasticamente X al primo ordine, $X \leq_1 Y$, allora $F_X \leq_1 F_Y \iff F_X(x) \geq F_Y(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}$.

[22] Una funzione ha caratteristica di subadditività quando $f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y$.

il che indica che non sempre è in grado di cogliere il beneficio derivante dalla diversificazione del rischio che si ottiene investendo al contempo in due attività differenti, piuttosto che in ciascuna separatamente. Solamente in caso di distribuzione congiunta normale dei rendimenti x e y e di comonotonicità[23] di questi ultimi, il VaR è in grado di diversificare il rischio

$$VaR_\alpha(x+y) = VaR_\alpha(x) + VaR_\alpha(y)$$

e può essere definita una misura di rischio coerente, poiché rispetta le proprietà di monotonicità, omogeneità positiva, invariabilità alle traslazioni e, appunto, subadditività.

2.4.2 – Misure di rischio derivanti dal "Valore a Rischio"

Per tentare di risolvere il primo problema legato al VaR, il fatto di ignorare la massima perdita potenziale, sono state realizzate alcune misure di rischio derivanti da esso.

La prima di queste è la "Tail Conditional Expectation" (TCE), definita come

$$TCE_\alpha(x) = E[-x | x \leq -VaR_\alpha(x)]$$

e rappresentante il valore atteso condizionato delle sole perdite che superano o uguagliano la soglia del VaR.

Notazione alternativa:

$$TCE_\alpha(x) = E\left[-x \cdot I_{x \leq -VaR_\alpha(x)}\right] / \Pr(x \leq -VaR_\alpha(x)$$

con $I_{x \leq -VaR_\alpha(x)} = \begin{cases} 0 \ se \ x > -VaR_\alpha(x) \\ 1 \ se \ x \leq -VaR_\alpha(x) \end{cases}$ funzione indicatore

Solitamente la TCE è una misura di rischio non coerente, poiché non subadditiva.

La seconda misura di rischio a disposizione è l'"Average Value at Risk" (AVaR), conosciuto anche come "Expected Shortfall" (ES). L'AVaR valuta la perdita attesa dell'investimento nell'α % dei casi peggiori.

$$AVaR_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_\beta(x) \, d\beta$$

Ha inoltre il pregio di essere una misura di rischio coerente, in grado di diversificare il rischio.

---

[23] x e y si definiscono comonotone quando $\left(x(w) - x(z)\right) \cdot \left(y(w) - y(z)\right) \geq 0 \quad \forall w, z \in \mathcal{R}$

La relazione che lega, “Value at Risk”, “Tail Conditional Expectation” e “Average Value at Risk” è la seguente ed è valida sempre.

$$AVaR_{\alpha}(x) \geq TCE_{\alpha}(x) \geq VaR_{\alpha}(x)$$

Solamente nel caso in cui *x* segua una distribuzione normale vale l’uguaglianza tra TCE e AVaR.

2.5 – Scelta della misura di rischio

La scelta della misura di rischio da adottare è cruciale al fine di avere un’idea chiara e precisa di quelle che saranno le caratteristiche dell’investimento che verrà intrapreso. Tutti gli strumenti affrontati nei paragrafi precedenti offrono all’investitore le medesime opportunità di utilizzo: la scelta tra essi andrà quindi ponderata secondo obiettivi e preferenze personali.
Pilastro fondamentale della decisione deve essere la semplicità, sia essa di calcolo e di interpretazione della misura di rischio. È infatti completamente inutile servirsi di strumenti di cui non si è in grado di comprendere appieno il significato, così come di indicatori complessi da calcolare che non aggiungono informazioni utili rispetto a quelle fornite da altri, ben più semplicistici.
Altro accorgimento da osservare è quello di servirsi di un’esigua quantità di strumenti, poiché calcolandone molti si rischia di giungere a conclusioni confusionarie o addirittura contraddittorie tra loro.
Qualunque sia la scelta finale, è comunque necessario tenere sotto controllo l’evoluzione della misura di rischio nel tempo. Dalle sue variazioni, infatti, è possibile cogliere un gran numero di informazioni utili, persino nel caso in cui lo strumento scelto si rivelasse poco corretto allo scopo per cui è stato destinato. Ogni variazione va investigata fino in fondo per capire quali sono le cause che l’hanno generata: dati errati, errori nel sistema, problemi e mutamenti delle ipotesi nel modello, cambiamenti volontari o involontari del rischio dell’investimento.

Per concludere, si attua un confronto tra il rischio valutato ex-ante ed il rischio valutato ex-post, per sottolineare se effettivamente le misure di rischio scelte hanno svolto a dovere il loro compito oppure andrebbero riviste.
Matematicamente, è possibile calcolare l'indice di efficienza del rischio, come rapporto tra il rischio effettivamente realizzatosi ed il rischio che si sarebbe dovuto realizzare secondo le previsioni.

$$Indice\ efficienza\ rischio = \frac{Rischio\ realizzato\ (ex-post)}{Rischio\ previsto\ (ex-ante)}$$

Il caso migliore è ovviamente quello in cui l'indice assume valore unitario, ad indicare che le nostre misure di rischio ex-ante hanno predetto perfettamente il rischio reale; l'eventualità peggiore è invece quella di ottenere un valore maggiore di uno, il che mostrerebbe l'inadeguatezza degli strumenti selezionati, i quali andrebbero a sottostimare la rischiosità dell'investimento.
La terza opportunità è trovarsi di fronte ad un indice con valore inferiore all'unità, ove le misure ex-ante sovrastimano il rischio effettivo. È una situazione sicuramente preferibile a quella di sottostima, poiché porterà l'investitore ad agire più cautamente del dovuto: se da un lato i suoi guadagni saranno limitati, dall'altro lo saranno anche le sue perdite. L'investitore probabilmente non diventerà un multimilionario (ammesso che già non lo sia), ma non finirà nemmeno in rovina.

2.6 – Rischi relativi alle commodities

Le materie prime presentano tipologie di rischio comuni a qualunque altro asset finanziario, come quello dovuto alle variazioni di prezzo o quello creditizio legato alla solvenza dei creditori, e tipologie più esclusive, come il rischio di trasporto ed il rischio di consegna, brevemente accennati anche nel primo capitolo.
Le commodities sono infatti l'unico asset finanziario ad essere fisicamente spedito al suo compratore, immediatamente (in realtà nel giro di 48 ore) se si opera sul

mercato spot o a scadenza del contratto sottoscritto in caso si operi sul mercato finanziario di strumenti derivati.

Per quel che riguarda il rischio di trasporto, esso si riferisce al parziale o totale deterioramento delle materie prime durante il trasporto stesso, dovuto a fattori:

- ordinari, quali il naturale deterioramento delle commodities agricole dovuto al semplice trascorrere del tempo;
- straordinari, quali furti, scioperi, rivolte, guerre, catastrofi naturali, ecc.

Nasce quindi la necessità per il responsabile della spedizione, solitamente lo speditore, di cautelarsi dalle perdite che questo tipo di rischiosità potrebbe provocargli. A tal fine, egli può ricorrere a diversi strumenti quali la sottoscrizione di una polizza assicurativa, il ricorso ad un meccanismo di autoassicurazione o l'inserimento nel contratto di compravendita di una clausola "Free On Board"

Le compagnie di assicurazione più importanti, come i famosi "Lloyds" di Londra, offrono ad oggi polizze "ad hoc" per coprirsi dal rischio di trasporto, permettendo la sottoscrizione di vari tipi di contratto. Molte società preferiscono però non rivolgersi a nessuna compagnia assicurativa, ma provvedere autarchicamente alla copertura dei rischi tramite autoassicurazione: alcune risorse della società vengono accantonate e utilizzate per coprire le eventuali perdite derivanti dal manifestarsi di eventi avversi.

La clausola "Free On Board" (FOB, conosciuta in Italia come clausola "Franco a bordo") è molto utilizzata nelle compravendite internazionali e stabilisce oneri e diritti di compratore e venditore, quali costi di trasporto, costi di assicurazione e costi di dogana. La "Camera di Commercio Internazionale", pubblicando lo standard "Incoterm" (International Commercial terms), ha stabilito che essa debba essere utilizzata sempre in corrispondenza di un porto di carico[24], e che la dicitura "FOB *nome del porto*" indichi che:

- al venditore spettano i costi di trasporto del bene dal luogo d'origine al porto in questione e i costi di caricamento sulla nave, oltre agli eventuali costi di dogana;

[24] Un porto di carico è un qualsiasi porto in cui la merce spedita viene caricata a bordo di una nave.

- al compratore spettano i costi di trasporto marino, di assicurazione, di scarico della merce e di trasporto della merce dal porto di scarico al luogo di destinazione, oltre, anche in questo caso, agli eventuali costi doganali.

La responsabilità dei beni pesa sulle spalle del venditore fino a che non è avvenuto il caricamento della merce sulla nave, il momento in cui il rischio di trasporto passa nelle mani del venditore.

Tutto ciò risulta valido anche nel caso in cui il mezzo di trasporto utilizzato non sia una nave, ma sia un aereo, un treno o un automezzo. In questi casi, la clausola non si chiamerà più “Free on Board” ma “Free Carrier” (FCA – in italiano “Franco spedizioniere”), e non avrà più senso parlare di porto di carico e scarico, ma ci si riferirà ad un magazzino concordato tra le due parti. Cambierà solamente la forma, ma non la sostanza.

Alla luce del fatto che anche i costi di trasporto non sono costanti nel tempo, ma subiscono variazioni, sono stati creati particolari strumenti finanziari derivati che presentano come sottostante proprio il prezzo di trasporto della merce, detti “Forward Freight Agreement” (FFA), che permettono di effettuare “hedging” contro la volatilità delle tariffe di viaggio. Essi sono trattati su un mercato privato, quindi i loro prezzi sono ignoti al grande pubblico e conosciuti solamente dagli addetti ai lavori, hanno avuto una controparte futures (presente sulla “Baltic International Freight Futures Exchange” (BIFFEX) dal 1985 al 2002) e sono costruiti su un indice basato sulle principali rotte seguite dalle navi cargo, il “Baltic Panama Index” (BPI).

N°	Descrizione	Cargo	Peso sul BPI
1	Golfo del Messico – ARA (Antwerp, Rotterdam, Amsterdam)	Cereali “leggeri”	10%
2	Viaggio transatlantico di 45-60 giorni	Charter a tempo	20%
3	Golfo del Messico – Sud del Giappone	Cereali “pesanti”, soia e sorgo	12.5%
4	Gibilterra – Estremo Oriente via Golfo del Messico (50-60 giorni)	Charter a tempo	12.5%
5	Porti del nord-ovest degli USA – Sud del Giappone	Cereali “pesanti”, soia e sorgo	10%

N°	Descrizione	Cargo	Peso sul BPI
6	Viaggio transpacifico di 35-50 giorni	Charter a tempo	20%
7	Costa ovest degli USA/British Columbia – Giappone/Corea del Sud	Charter a tempo	15%

Tabella 1- Composizione del "Baltic Panama Index"

Negli ultimi 10 anni i prezzi dei trasporti sono cresciuti enormemente, a causa dell'effetto a catena generato dall'aumento vertiginoso di domanda di navi cargo da parte della Cina, al fine di importare materie prime. Questo ha portato ad un'improvvisa scarsità di navi disponibili per il resto del mondo, ed al conseguente aumento dei prezzi, non solo dei trasporti, ma anche delle commodities medesime. Nel solo 2003, ad esempio, l'affitto giornaliero di una nave per il trasporto del carbone è cresciuto di più del 250%, passando da 28.000 $ a 75.000 $, nel giro di meno di dodici mesi.

Il rischio di consegna è inerente alla qualità della merce che viene consegnata al cliente, e dal quale quest'ultimo non può cautelarsi, finanziariamente parlando, in nessun modo. L'unico "hedging" applicabile è utilizzare un po' d'astuzia, intrattenendo relazioni commerciali solo con chi si conosce da lungo tempo e non ha mai tradito le aspettative o, qualora ciò non sia possibile, preparando accuratamente i contratti di compra-vendita facendo sì di garantirsi un determinato standard qualitativo.

Capitolo 3 – QuantLibXL, contratti futures su commodities e curve di tassi forward

Quanto seguirà nei prossimi tre capitoli si prefigge l'obiettivo di illustrare al lettore il lavoro svolto, cercando di entrare nel modo più approfondito possibile all'interno delle dinamiche che lo regolano e occupandosi sia della mera realizzazione pratica sia dei concetti teorici alle spalle della stessa.
In questo terzo capitolo, ad un primo sguardo introduttivo a QuantLibXL seguirà una presentazione delle materie prime che sono state prese in considerazione per la realizzazione dell'analisi e delle quotazioni dei futures sulle stesse e, per finire, si farà luce sul ruolo ricoperto dai tassi forward e dalle curve che li descrivono.

3.1 – QuantLibXL

QuantLib è una libreria informatica[25] gratuita e "open-source"[26], totalmente dedicata alla finanza quantitativa. Scritto con il linguaggio di programmazione C++, deve gran parte del suo successo verso analisti finanziari e sviluppatori di software alla sua offerta di una solida base su cui poggiarsi per svolgere i più svariati tipi di attività finanziaria e non, dal calcolo del prezzo di un'opzione all'interpolazione di dati tramite spline cubiche. QuantLib offre potenti strumenti utili sia all'implementazione pratica sia a quella teorica, rivolgendosi anche a chi, ad esempio, intende studiare la modellizzazione avanzata di particolari fenomeni finanziari ed economici, ed incentivando la collaborazione tra professionisti ed accademici. Grazie ad esso, chi si occupa di finanza quantitativa non deve più perdere tempo a scrivere in C++ o in un altro linguaggio di programmazione le funzioni che negli anni sono state realizzate centinaia di volte dai suoi colleghi,

[25] Una libreria, in informatica, contiene codici e dati che possono essere utilizzati da chiunque sia in possesso della stessa, senza doverli realizzare autonomamente.
[26] "Open source" indica che il codice con cui è stato scritto il software è a totale disposizione (può essere letto, utilizzato e modificato a piacimento) di chiunque ne sia interessato.

ma può concentrarsi sui suoi compiti veri e propri, poiché trova a propria disposizione tutto quello che gli serve all'interno della libreria.

Per renderlo più appetibile al grande pubblico, è stato realizzato un componente aggiuntivo per Microsoft Excel, chiamato QuantLibXL. Quest'ultimo permette di usufruire appieno di tutte le potenzialità della libreria QuantLib senza addentrarsi nel complicato mondo della programmazione informatica, ma interfacciandosi unicamente con il certamente più familiare software di calcolo della società di Redmond, presente nei computer di quasi tutti gli utenti del mondo.

Le ragioni per cui si è scelto di utilizzare QuantLibXL piuttosto che un software come MatLab sono molteplici.

La comodità dell'interfaccia Excel è una delle principali: è sufficiente conoscere a grandi linee l'ambiente dei fogli di calcolo per trovarsi subito a proprio agio e provare a sperimentare, mentre MatLab è sicuramente più ostico da "domare" per un novizio, essendo un software a se stante e provvisto quindi delle proprie regole. Inoltre, creare funzioni personalizzate all'interno dell'ambiente di quest'ultimo presuppone la conoscenza di un linguaggio di programmazione specifico, mentre per l'ambiente Excel è sufficiente la conoscenza del "Visual Basic", linguaggio maggiormente diffuso e utilizzabile anche in contesti differenti da questo.

Non sono stati certo ignorati, a fini decisionali, nemmeno il costo e la libertà di utilizzo. Mentre, come già annunciato, QuantLib è completamente gratuito, una licenza studentesca per MatLab (comprendente il "pacchetto base") può essere acquistata al prezzo di 89,00 $. Per onestà intellettuale, è doveroso specificare che, in questo momento, l'Università degli Studi di Milano – Bicocca offre a tutti i suoi studenti della facoltà di Economia una licenza gratuita per l'utilizzo di MatLab, quindi il problema del costo di utilizzo potrebbe essere ignorato. Non può però passare in secondo piano la libertà di utilizzo: il fatto che il codice su cui è basato QuantLib sia a completa disposizione dell'utente, che lo può quindi analizzare, modificare, migliorare e ridistribuire a piacimento, è di primaria importanza e rappresenta il futuro, per non dire il presente, dell'informatica. Sempre più software vengono infatti resi disponibili gratuitamente e con licenza "open-source", in modo da consentire agli utenti stessi di migliorarli e di cogliere i suggerimenti e le opinioni della “community” che ne usufruisce. Certo, in questo modo non è possibile vendere il proprio prodotto, ed i soli profitti per gli sviluppatori sono quelli derivanti dalla pubblicità e dalle donazioni che gli utenti soddisfatti rilasciano loro, ma il servizio reso alla comunità di “users”, effettivi o potenziali, è lodevole e dal valore inestimabile.

3.2 – Le commodities scelte

Al fine di poter confrontare il rischio di investimenti diversi in contratti futures su materie prime differenti, sono state selezionate tre commodities appartenenti ciascuna ad una diversa categoria:

- il rame, rappresentante della categoria dei metalli non ferrosi;
- il mais, appartenente alle materie prime agricole, in particolare ai cereali;
- il petrolio grezzo della qualità “West Texas Intermediate” (WTI), a rappresentare i prodotti energetici.

Scegliendo beni provenienti da categorie differenti si è cercato di osservare se le caratteristiche delle commodities siano le stesse indipendentemente dal gruppo di appartenenza oppure se la diversa natura generi particolari peculiarità.

3.2.1 – Il rame

Il rame è stato il primo metallo ad essere utilizzato dall’uomo, ed è scambiato come materia prima da migliaia di anni. Si presenta di colore rossastro, è un ottimo conduttore termico ed elettrico (è infatti il metallo più utilizzato per la produzione dei fili elettrici), non è magnetico ed è molto resistente alla corrosione. Estremamente duttile e malleabile, ben si presta alla formazione di leghe metalliche: se unito allo stagno dà vita al bronzo, mentre unito allo zinco forma l’ottone.

Il rame trattato nei mercati finanziari è puro, fuso a formare dei cilindri, e deve rispettare particolari standard qualitativi. Sul mercato londinese, il “London Metal

Exchange", sono disponibili contratti futures sul rame con scadenza ad ogni mese dell'anno, ed il loro prezzo è espresso in dollari per tonnellata del bene.

Mentre i prezzi spot sono stabiliti dal ricorrente incontro tra domanda e offerta, i prezzi di lungo periodo sono influenzati da vari fattori, tra i quali quello relativo alla volatilità della valuta in cui sono espressi, i cambiamenti nei fattori economici di lungo periodo, i mutamenti delle preferenze di consumo e gli shocks improvvisi ed inaspettati. Per i metalli, è solitamente il primo di questi fattori a influenzare maggiormente la volatilità dei prezzi, ma il fatto che la maggior parte dei fattori di costo sia espresso in dollari e lo sia anche la commodity in esame, fa sì che la sua influenza sia relativa. Negli ultimi anni si è assistito ad un grosso aumento del prezzo del rame, dovuto ad un marcato incremento della domanda del bene, soprattutto da parte della Cina. Di conseguenza è aumentata anche la produzione, sia mineraria sia raffinata, di questa materia prima, con il Cile e la Cina stessa a dominare il mercato.

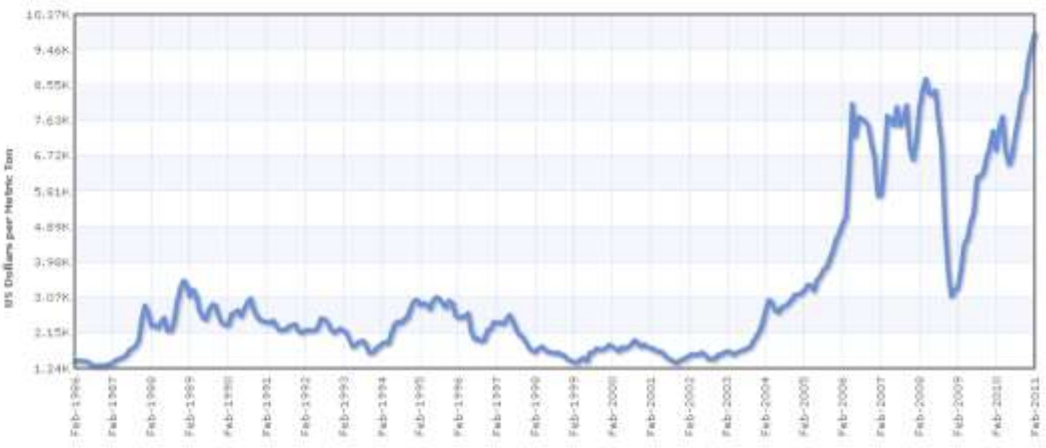

Figura 6 – Andamento storico del prezzo del rame

Fonte: "London Metal Exchange"

3.2.2 – Il mais

Il mais è uno dei cereali più diffusi a livello mondiale, domesticato dagli indigeni americani in tempi preistorici. I suoi chicchi si presentavano in natura troppo duri per i denti degli autoctoni, e le pannocchie di dimensioni troppo ridotte affinché si potessero sfamare interi villaggi (si pensa che all'epoca la lunghezza media delle stesse fosse di poco più di un centimetro). Gli indigeni americani hanno così selezionato e coltivato solamente le varietà con chicchi più morbidi e pannocchie più grandi, fino a giungere alla coltivazione di un mais in tutto e per tutto simile a quello conosciuto odiernamente.

È un cereale che viene coltivato sia nelle zone tropicali sia nelle zone temperate del pianeta, dove però è per la maggior destinato all'alimentazione animale piuttosto che a quella umana (in Sud America è invece la base della dieta delle popolazioni che vi abitano) e costituisce ben il 70% dei cereali trattati nei mercati mondiali. I cinque più grandi produttori di mais al mondo sono, in ordine, gli Stati Uniti, la Cina, il Brasile, l'Unione Europea ed il Messico, e gli stessi Paesi sono anche tra i maggiori consumatori di questo cereale.

Il granturco trattato sul "Chicago Board of Trade" non è destinato all'alimentazione umana ma a costituire foraggio per animali e deve competere con la concorrenza di altre commodities agricole, quali frumento, farina di soia e sorgo, molto più ricche di aminoacidi essenziali.

Oggi giorno, a causa del continuo aumento del prezzo del petrolio grezzo, il 5% del mais statunitense viene utilizzato per la produzione di etanolo e altri carburanti alternativi, iniziativa che ha portato il Governo americano ad incentivarne la coltivazione a questo fine, tramite programmi governativi da milioni di dollari, ed andando così inevitabilmente ad influenzarne il prezzo sui mercati.

Essendo una commodity agricola, la sua offerta, dipendente dalle condizioni meteorologiche, può essere piuttosto variabile, rendendo molto volatili anche i prezzi del bene stesso. Gli addetti ai lavori, infatti, controllano scrupolosamente i bollettini meteorologici rilasciati settimanalmente dal "Dipartimento dell'agricoltura" americano, che non si occupa solo di temperature, precipitazioni e percentuali d'umidità statunitensi, ma fornisce informazioni dettagliate anche su tutto il resto del mondo. Altro importantissimo documento, stavolta mensile, è il "World Supply and Demand Estimates" che fornisce le stime della domanda e dell'offerta futures di tutte le principali commodities agricole presenti sui mercati.

I futures sul mais hanno scadenza massima a quattro anni, e non sono disponibili con scadenze pari ad ogni mese dell'anno come accade per il rame, ma soltanto in mesi particolari: marzo, maggio, luglio, settembre e dicembre. L'unità di misura utilizzata per i loro prezzi è il "cents per bushel", ove i centesimi sono ovviamente riferiti al dollaro US, mentre il “bushel”[27] ad una particolare forma di misurazione legata alla tradizione agricola americana. Infine, il sottostante di ogni contratto corrisponde a 5.000 bushels, circa 127 tonnellate metriche di granturco.

3.2.3 – Il petrolio grezzo

Il petrolio grezzo, o greggio, è la materia prima principe dei mercati di commodities, tanto da essersi guadagnata il pomposo appellativo di oro nero. Si presenta in forma liquida e densa, è altamente infiammabile e assume colorazioni che vanno dal nero all’arancione, passando dal marrone al verde scuro, a seconda di quali idrocarburi ne compongano la miscela e, quindi, della sua qualità.

Esso si forma in seguito all’esposizione in assenza di ossigeno ad alti livelli di temperatura e pressione della materia organica decomposta presente negli strati intermedi della crosta terrestre. Questo processo porta ad un rilascio di idrocarburi che, meno densi della sostanza da cui sono stati generati, risalgono verso gli strati più superficiali della terra, formando i giacimenti petroliferi.

Il mercato del petrolio è un mercato globale, altamente volatile e pesantemente influenzato dalle stime relative alle riserve del bene. I più grandi giacimenti di greggio si trovano, in ordine decrescente di dimensione, in Arabia Saudita e in tutta la zona medio-orientale, in Venezuela, in Russia e in Nord America, soprattutto in Canada. Nonostante il primato del Medio Oriente, il più grande produttore mondiale di petrolio è la Russia, seguita proprio dall’Arabia Saudita e dagli Stati Uniti d’America, il più grande consumatore globale, con ben il 20% della produzione annua totale.

Il greggio della qualità “West Texas Intermediate”, chiamato anche “Texas light sweet”, è utilizzando come riferimento per i prezzi di tutte le altre qualità di petrolio. È definito “leggero” perché presenta una bassa densità e “dolce” a causa del suo basso contenuto di zolfo. Curioso come la località più importante a livello mondiale per il WTI sia Cushing, in Oklahoma, una cittadina con soli 8000 residenti, crocevia fondamentale per il commercio del greggio tra gli Stati produttori che si affacciano sul Golfo del Messico (il più importante è il Texas) e quelli consumatori posti più nord. La leadership del “West Texas Intermediate” è

[27] Un bushel è pari a circa 25,4 chilogrammi.

stata messa in discussione negli ultimi anni dalla prepotente ascesa di altre due qualità di petrolio: il "Brent" prodotto nei Paesi che si affacciano sul Mare del Nord ed il "Dubai" prodotto nel Paese omonimo. Il primo, in particolare, viene già utilizzato come riferimento per prezzare il greggio prodotto in Europa e in Africa.
I contratti futures sul petrolio sono trattati sul NYMEX e sull'ICE, presentano un prezzo espresso in "dollari al barile"[28] e un sottostante pari a 1000 barili. Da sottolineare il fatto che i futures disponibili presentino scadenze mensili da qui a 5 anni, e, successivamente, semestrali fino a 10 anni da oggi.

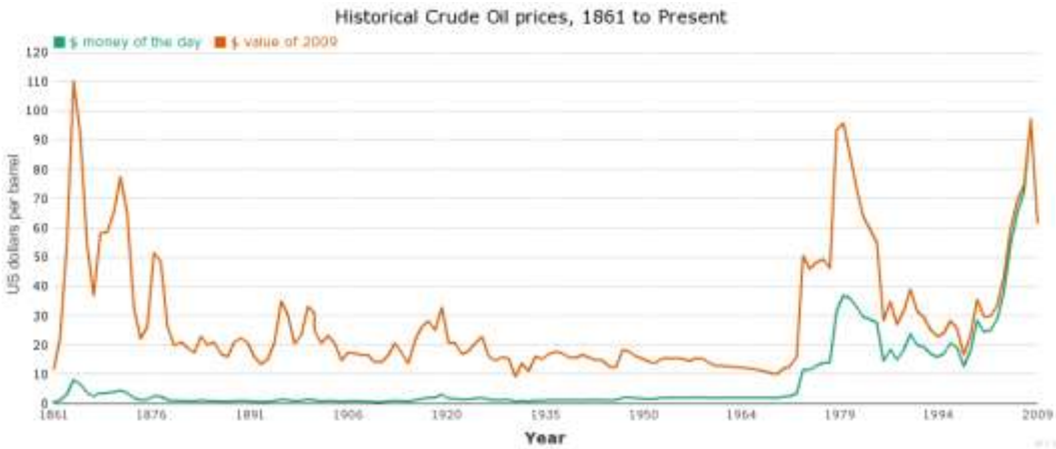

Figura 7 – Andamento storico del prezzo del petrolio grezzo (la linea arancione prende in considerazione anche l'inflazione storica, per un confronto più omogeneo coi prezzi al 2009)
Fonte: "U.S. Energy Information Administration"

3.3 – Quotazioni dei contratti futures sulle commodities

Per la realizzazione del presente lavoro, sono state prese in esame le quotazioni dei contratti futures su rame, mais e petrolio WTI a partire dal 01/11/2011 fino al 23/01/2012, corrispondenti a 51 osservazioni per ciascuno strumento derivato.

[28] Un barile di petrolio è pari a 159 litri.

Name	Maturity	Date	Price
copper	2012G	01/11/2011	7993,00
copper	2012H	01/11/2011	7995,00
copper	2012J	01/11/2011	7995,50

Tabella 2 – Esempio di quotazioni relative ai futures sul rame

Come si vede dalla tabella, per ogni osservazione vengono forniti 4 tipi di dati:

- il nome della commodity sottostante
- il codice relativo alla scadenza del contratto
- la data a cui si riferisce la quotazione
- il prezzo del contratto futures

Il codice relativo alla "maturity" del contratto deve essere decodificato al fine di ottenere una data, riferita all'ultimo giorno in cui il futures viene trattato sul mercato, il "Last Trading Day".

3.3.1 – La "maturity" e il "Last Trading Day"

La "maturity" di un contratto futures è definita tramite un codice alfanumerico composto da 4 numeri, indicanti l'anno, ed una lettera, indicante il mese.

Ad esempio, "2012G" indica il mese di febbraio dell'anno 2012.

Lettera	Mese	Lettera	Mese
F	Gennaio	N	Luglio
G	Febbraio	Q	Agosto
H	Marzo	U	Settembre
J	Aprile	V	Ottobre
K	Maggio	X	Novembre
M	Giugno	Z	Dicembre

Tabella 3 – Corrispondenza lettera-mese nei codici per le scadenze dei contratti

Per trovare il giorno ed ottenere così la data completa, è necessario conoscere la regola per il calcolo del "Last Trading Day" relativa alla commodity in esame.

Regola	Descrizione
3rd-before-first	Il terzo giorno lavorativo precedente il primo giorno di calendario del mese di scadenza.
10th-bday	Il decimo giorno lavorativo del mese di scadenza.
15th-minus-one	Il giorno lavorativo precedente il quindicesimo giorno di calendario del mese di maturity.
17th-last	Il diciassettesimo giorno lavorativo precedente la fine del mese di scadenza.
3rd-before-25th	Il terzo giorno lavorativo precedente il venticinquesimo giorno di calendario del mese che precede quello di maturity.
3rd-last	Il terzo giorno lavorativo precedente la fine del mese di maturity.
Last-bday	L'ultimo giorno lavorativo del mese di scadenza.

Tabella 4 – Regole per il calcolo del "Last Trading Day"

Per le materie prime considerate, la regola da applicare è la seguente:

- 3rd-last per il rame
- 15th-minus-one per il mais
- 3rd-before-25th per il petrolio WTI

Per il calcolo vero e proprio, è stata utilizza la funzione di QuantLibXL

$$qlCalendarAdvance()$$

utilizzando un calendario basato sul sistema "TARGET"[29], una convenzione per i giorni lavorativi "Modified Following" e forzando l'arrivo alla fine del mese[30]. Quando non diversamente specificato, saranno questi i parametri utilizzati nelle funzioni che ne necessitano.

3.3.1.1 – Le "business day conventions"

Le convenzioni per i giorni lavorativi sono state stabilite per ovviare al problema del "date rolling", che si manifesta quando la data di un pagamento corrisponde ad

[29] Il "TARGET" (**T**rans-European **A**utomated **R**eal-time **G**ross Settlement **E**xpress **T**ransfer System) è il sistema di pagamenti interbancari più diffuso all'interno dell'Unione Europea. Il calendario basato su di esso prevede come festivi: tutti i sabati e le domeniche, il primo gennaio, il venerdì Santo, il lunedì dell'Angelo, il primo maggio ed il 25 e il 26 di dicembre.

[30] Partendo dall'ultimo giorno lavorativo di un dato mese, avanzando di un mese giungo all'ultimo giorno lavorativo del mese seguente.

un giorno festivo in base al calendario in uso. Risulta dunque necessario spostare la data del pagamento in un giorno lavorativo, seguendo una delle “business day conventions”.

Convenzione	Descrizione
Actual	Il pagamento viene comunque effettuato nel giorno stabilito, anche se festivo.
Following	Il pagamento viene effettuato nel primo giorno lavorativo seguente.
Modified Following	Come nel caso “Following”, a meno che il primo giorno lavorativo utile non sia nel mese seguente. In quest’eventualità, il pagamento è spostato al primo giorno lavorativo precedente.
Previous	Il pagamento viene effettuato nel primo giorno lavorativo precedente.
Modified Previous	Come nel caso “Previous”, a meno che il primo giorno lavorativo utile non sia nel mese precedente. In quest’eventualità, il pagamento è spostato al primo giorno lavorativo seguente.

Tabella 5 – “Business day conventions”

Alla luce di tutto questo, è stato possibile aggiungere un’ulteriore colonna alle quattro precedenti, quella relativa appunto all’ultimo giorno in cui il futures sarà quotato sul mercato.

Name	Maturity	Last Trading Day	Date	Close
copper	2012G	24/02/2012	01/11/2011	7993,00
copper	2012H	27/03/2012	01/11/2011	7995,00
copper	2012J	25/04/2012	01/11/2011	7995,50

Tabella 6 – Evoluzione dell’esempio riportato nella Tabella 2

3.4 – Tassi e curve forward

Al fine di avere a disposizione fattori di sconto e tassi zero in tutte le date di interesse, sono stati sfruttati i dati dei tassi forward relativi a depositi e contratti swap trimestrali sul dollaro. Tramite questi ultimi sono state costruite le curve forward, una al giorno per 51 giorni, dalle quali ricavare i valori di cui si abbisogna.

Date	Instrument	Tenor[31]	Maturity	Forward rate
01/11/2011	depo-USD-1w	1w	08/11/2011	0,19%
01/11/2011	depo-USD-1m	1m	01/12/2011	0,26%
01/11/2011	depo-USD-2m	2m	02/01/2012	0,43%
01/11/2011	depo-USD-3m	3m	01/02/2012	0,62%
01/11/2011	depo-USD-6m	6m	02/05/2012	0,82%
01/11/2011	depo-USD-12m	12m	01/11/2012	1,24%
01/11/2011	swap-USD-2y-4	2y	01/11/2013	0,16%
01/11/2011	swap-USD-3y-4	3y	03/11/2014	0,95%
01/11/2011	swap-USD-4y-4	4y	02/11/2015	1,66%
01/11/2011	swap-USD-5y-4	5y	01/11/2016	2,32%
01/11/2011	swap-USD-6y-4	6y	01/11/2017	2,82%
01/11/2011	swap-USD-7y-4	7y	01/11/2018	3,06%
01/11/2011	swap-USD-8y-4	8y	01/11/2019	3,23%
01/11/2011	swap-USD-9y-4	9y	02/11/2020	3,24%
01/11/2011	swap-USD-10y-4	10y	01/11/2021	3,33%
01/11/2011	swap-USD-11y-4	11y	01/11/2022	3,42%
01/11/2011	swap-USD-12y-4	12y	01/11/2023	3,42%
01/11/2011	swap-USD-13y-4	13y	01/11/2024	3,52%
01/11/2011	swap-USD-14y-4	14y	03/11/2025	3,33%
01/11/2011	swap-USD-15y-4	15y	02/11/2026	3,17%
01/11/2011	swap-USD-20y-4	20y	03/11/2031	3,08%
01/11/2011	swap-USD-25y-4	25y	03/11/2036	2,98%
01/11/2011	swap-USD-30y-4	30y	01/11/2041	2,98%

Tabella 7 – Tassi forward a disposizione per la data 01/11/2011

I "forward rate" sono tassi impliciti negli "spot rate". Si consideri un primo investimento della durata di T_1 anni al tasso d'interesse annuo r_1, ed un secondo investimento della durata di T_2 anni al tasso r_2, con $T_2 > T_1$ e capitale investito unitario. A quale tasso dovrei reinvestire per un ulteriori $T_2 - T_1$ anni il montante ottenuto dal primo investimento, per uguagliare il montante che avrei ottenuto scegliendo il secondo investimento? È proprio il tasso forward a fornire la risposta.

[31] Il "tenor" indica la durata della vita dello strumento, il tempo rimanente prima della sua scadenza.

In capitalizzazione continua, vale

$$e^{r_2 \cdot T_2} = e^{r_1 \cdot T_1} \cdot e^{r_{fwd} \cdot (T_2 - T_1)}$$

da cui

$$r_{fwd} = \frac{r_2 \cdot T_2 - r_1 \cdot T_1}{T_2 - T_1}$$

Il tasso r_{fwd} implicito nei tassi spot $r_1$ed r_2 è detto tasso forward a T_1 anni per T_2 anni. Ad esempio, il "forward rate" relativo allo swap a 4 anni sul dollaro, presente nella tabella 7, è il tasso forward a 3 anni per 1 anno.

Si dia ora una rapida occhiata alle caratteristiche degli strumenti presi in esame.
I depositi altro non sono che depositi bancari, effettuati in una particolare valuta (in questo caso il dollaro americano) e della durata variabile tra una settimana ed un anno, su cui viene pagato un determinato tasso d'interesse.
I contratti swap sono invece strumenti derivati consistenti in uno scambio di "cash flows" tra due parti. Nel caso in questione, swap trimestrale sul dollaro, si parla di "Interest rate swap" (IRS), poiché i partecipanti al contratto si scambiano flussi di cassa legati a tassi d'interesse, o, per essere maggiormente precisi, di "Fixed-for-floating rate swap" (fisso contro variabile). Infatti, una delle due controparti, il "payer", paga annualmente all'altra controparte, detta "receiver", un tasso d'interesse fisso e riceve in cambio, trimestralmente, il tasso LIBOR[32] a tre mesi sul dollaro. Il tasso d'interesse fisso ("predetto" dai tassi forward presenti nella tabella 7) ed il LIBOR devono essere moltiplicati per un determinato nozionale, al fine di poter generare un vero e proprio scambio di flussi di cassa tra le controparti. I contratti IRS considerati hanno tutti durata pluriennale, da 2 fino a 30 anni.

3.4.1 – Costruzione curva forward

Presentati i concetti essenziali, si seguiterà ora a descrivere la procedura che porta alla costruzione della curva forward giornaliera.

[32] Il LIBOR (London InterBank Offered Rate) è uno dei tassi d'interesse usati come riferimento dal mercato. In particolare, è il tasso a cui le principale banche europee si prestano denaro tra di loro "overnight", dopo la chiusura del mercato.

La “forward curve” non è nient’altro che la rappresentazione della relazione tra i tassi forward e le scadenze a cui questi fanno riferimento, e la sua costruzione procede di nodo in nodo.

Per prima cosa, dunque, è necessario scegliere il nodo iniziale, in cui il fattore di sconto sarà pari a 1. Poiché il “discount factor” assume valore unitario solamente nella data odierna, il nodo di riferimento verrà fissato proprio in quel giorno. È quindi necessario aggiungere un dato a quelli disponibili: il tasso forward a zero giorni per zero giorni, che sarà ovviamente nullo.

Per automatizzare questo processo, che è stato ripetuto 51 volte, è stata realizzando una “macro” in “Visual Basic”, da poter utilizzare in ambiente Excel.

```
Sub first_fwd()
    Dim I As Integer, F_Dat As Date
    I = 2
    Do
        F_Dat = Cells(I + 1, 1)
        Cells(I, 1) = F_Dat
        Cells(I, 3) = "0d"
        Cells(I, 5) = 0
        I = I + 24
    Loop Until (I > 1225)
End Sub
```

Essa ha il compito di:

- copiare, nella riga vuota al di sopra di quella dedicata al primo deposito, la data di valutazione dello strumento stesso (che è la stessa per tutti gli altri strumenti relativi a quel giorno).
- inserire un “tenor” di zero giorni
- inserire un tasso forward nullo
- ripetere queste tre operazioni per tutto il periodo in esame

Date	Instrument	Tenor	Maturity	Forward rate
01/11/2011	-	0d	01/11/2011	0,00%

Tabella 8 – Esempio di nodo iniziale

Prima di procedere ulteriormente, si devono introdurre i concetti di "forward rate" istantaneo e di fattore di sconto forward.
Sapendo che

$$D(d_i) = e^{-rT_i} \qquad \text{e} \qquad e^{rT_2} = e^{rT_1} \cdot e^{r_{fwd}(T_2 - T_1)}$$

il tasso forward è descrivibile attraverso i fattori di sconto

$$r_{fwd}(d_1, d_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln\left(\frac{D(d_1)}{D(d_2)}\right) = \frac{1}{T_2 - T_1}\left(\frac{D(d_1)}{D(d_2)} - 1\right) = \frac{e^{r(T_2 - T_1)} - 1}{T_2 - T_1}$$

Se T_2 è molto prossima a T_1, è possibile definire il "forward rate" istantaneo

$$\lim_{T_2 \to T_1} r_{fwd}(T_1, T_2) = r$$

Per quel che riguarda invece il "forward discount factor", è sufficiente considerare

$$D(d_2) = e^{-rT_2} = e^{-r(T_2 + T_1 - T_1)} = e^{-rT_1} \cdot e^{-r(T_2 - T_1)} = D(d_1) \cdot e^{-r(T_2 - T_1)}$$

$D(d_2)$ è quindi il fattore di sconto forward a T_1 anni per $T_2 - T_1$ anni.

Un solo tasso r non è però sufficiente: esso non sarà mai consistente con tutti gli strumenti. Infatti, prendendo in esame i fattori di sconto relativi ai primi due depositi, esprimibili in capitalizzazione semplice (poiché il tempo a scadenza è molto breve, gli interessi maturanti sulla quota interessi passata sono ignorabili),

$$D(d_1) = e^{-rT_1} = \frac{1}{1 + r_{fix(1)} T_1}$$

$$D(d_2) = e^{-rT_2} = \frac{1}{1 + r_{fix(2)} T_2}$$

si osserva come venga imposto un doppio valore ad r, condizione assolutamente assurda, matematicamente parlando, in caso di tasso costante.

$$r = \frac{1}{T_1} \ln\left(1 + r_{fix(1)} T_1\right) \quad ed \quad r = \frac{1}{T_2} \ln(1 + r_{fix(2)} T_2)$$

A questo punto si hanno a disposizione tutti gli strumenti per costruire la curva forward. I nodi seguenti quello iniziale saranno posizionati in corrispondenza delle date di scadenza degli strumenti sul dollaro analizzati, ed i tassi d'interesse utilizzati saranno i "forward rate" corrispondenti.
In questo modo, il " discount factor" in una data compresa tra il nodo iniziale ed il primo nodo verrà calcolato come

$$D(d) = e^{-r_1 T} \quad con\ d \leq d_1$$

mentre per il calcolo in qualsiasi altro data si utilizzerà il fattore di sconto forward

$$D(d) = D(d_i)e^{-r_i(T-T_i)} \quad con\ d_i < d \leq d_{i+1}$$

Nel caso estremo in cui la data d in cui si è intenzionati a calcolare il fattore di sconto ecceda l'ultima scadenza disponibile, si impone l'utilizzo delle ultime misurazioni forward disponibili

$$D(d) = D(d_n)e^{-r_n(T-T_n)} \quad con\ d > d_n$$

Il procedimento di costruzione della curva è stato realizzato per tutti i 51 giorni in esame, tramite l'utilizzo della funzione di QuantLibXL

$$qlForwardCurve$$

Capitolo 4 – "Convenience", prezzi spot impliciti ed interpolazioni di dati

Questo quarto capitolo si occuperà della seconda parte del lavoro svolto riguardo le quotazioni dei contratti futures su commodities. Si parlerà di "convenience coefficients" e "implied spots", fondamentali per il calcolo dei "convenience yields", e si verrà introdotti nel mondo delle interpolazioni di dati, necessarie alla realizzazione della simulazione storica.

4.1 – Calcolo dei "convenience yield"

Del concetto di "convenience yield" si è già ampiamente parlato nel primo capitolo del presente lavoro, quindi in questa sede ci si limiterà a qualche semplice richiamo. Alla luce delle relazioni "spot-forward" e "forward-futures", è possibile esprimere il prezzo di ciascun contratto futures su materie prime come

$$F^T(t) = S(t) \cdot e^{(r(t)-y(t))(T-t)}$$

D'ora in avanti, l'indicazione dell'indice t sarà omessa, in modo da alleggerire la notazione.

Il tasso d'interesse r considerato sarà il tasso zero di cui si è parlato nel capitolo precedente, il che permette di riscrivere l'equazione di prezzo.

$$F^T = \frac{S}{D(T)} e^{-yT}$$

Da quest'ultima, tramite qualche passaggio algebrico, è immediato ricavare l'equazione per il calcolo del "convenience yield".

$$y = \frac{1}{T} ln\left(\frac{S}{D(T)F^T}\right)$$

Sembrerebbe tutto piuttosto semplice. Purtroppo, si dispone solamente dei prezzi dei contratti futures, mentre si è totalmente sprovvisti delle quotazioni dei prezzi spot delle materie prime: la formula risulta inapplicabile.

Per rimediare, è possibile servirsi del prezzo spot implicito nei prezzi futures di una commodity, non prima di aver però introdotto la relazione "futures-futures" e il "convenience coefficient", il primo "convenience yield" forward disponibile.

4.1.1 – La relazione "futures-futures" e il "convenience coefficient"

Oltre alle fondamentali relazioni "spot-forward" e "forward-futures" precedentemente discusse, ne esiste una terza non meno importante, quella che intercorre tra i prezzi di due contratti futures.

Si consideri la seguente posizione (le maturity dei due futures devono essere prossime, al più qualche mese di distanza):

	Oggi	T_i	(T_i, T_j)	T_j
Posizione lunga su F^{T_i}	0	$-F^{T_i}$	Detenzione asset	-
Posizione corta su F^{T_j}	0	-	-	$+F^{T_j}$
Finanziamento per acquisto F^{T_i}	-	$+F^{T_i}$	-	$-F^{T_i}\left(1 + r \cdot \left(T_j - T_i\right)\right)$

Al tempo T_i si entra in possesso dell'asset e lo si detiene fino al tempo T_j, quando viene consegnato al compratore del secondo contratto. Il tasso d'interesse pagato sul finanziamento si riferisce al tasso zero vigente tra le scadenze dei due contratti.

Per la condizione di non arbitraggio, è necessario che la ricchezza finale sia nulla (poiché lo era anche quella iniziale), tenendo conto di costi e benefici derivanti dalla detenzione della materia prima grazie al "convenience yield" forward corrispondente y_{ij}:

$$F^{T_j} = F^{T_i} \cdot \left(1 + r(T_i, T_j)(T_j - T_i)\right) \cdot e^{-y_{ij}(T_j - T_i)}$$

Il tasso d'interesse privo di rischio tra T_i e T_j può essere visto come il tasso zero forward al periodo T_i per il periodo $T_j - T_i$, che per definizione è

$$r\left(T_i, T_j\right) = r_{fwd}\left(T_i, T_j\right) = \frac{1}{T_j - T_i}\left(\frac{D(T_i)}{D(T_j)} - 1\right)$$

Il prezzo del futures F^{T_j} è a questo punto esprimibile come

$$F^{T_j} = F^{T_i}\frac{D(T_i)}{D(T_j)}e^{-y_{ij}(T_j - T_i)}$$

da cui è immediato ricavare la formula del generico "convenience yield" forward

$$y_{ij} = \frac{1}{T_j - T_i} ln\left(\frac{D(T_i)F^{T_i}}{D(T_j)F^{T_j}}\right)$$

Per ottenere infine il "convenience coefficient" è quindi sufficiente utilizzare le quotazioni dei primi due futures a disposizione e le rispettive scadenze

$$y_{12} = \frac{1}{T_2 - T_1} ln\left(\frac{D(T_1)F^{T_1}}{D(T_2)F^{T_2}}\right)$$

Occorre prestare particolare attenzione alle maturities a cui si riferiscono i primi due contratti futures, assicurandosi che siano liquide. In molte occasioni, infatti, nonostante siano disponibili futures con scadenza mensile (come nel caso del rame), questi strumenti risultano liquidi solo a particolari maturities, ad esempio ogni tre mesi. Inoltre, nel caso la maturity dello strumento sia molto prossima (5-10 giorni lavorativi), è possibile che le quotazioni del mercato non siano affidabili, perché gli investitori potrebbero aver preferito spostare le loro posizioni verso contratti con scadenza più lunga, più liquidi, poiché non interessati alla consegna effettiva del bene.

Ottenuto il "convenience coefficient", si può procedere alla valutazione del prezzo spot implicito nelle quotazioni dei contratti futures

$$S^F = D(T_1)F^{T_1}e^{y_{12}\cdot T_1}$$

che consentirà il calcolo del generico "convenience yield"

$$y_i = \frac{1}{T_i} ln\left(\frac{S^F}{D(T_i)F^{T_i}}\right)$$

Il prezzo spot implicito e, di conseguenza, il "convenience coefficient" sono stati calcolati una volta al giorno per ogni commodity, per un totale di 153 valori di ciascuno di essi. Nell'esempio osservabile nella tabella 9, relativo al mais, si osservano y_{12} negativi e spots impliciti minori dei prezzi degli strumenti futures: ciò è segnale del fatto che il mercato prevede che i benefici legati al possesso fisico della commodity per il periodo di 2 mesi che intercorrerà dal 14/03/2012 al 14/05/2012 saranno minori dei costi derivanti dallo stesso (costi di magazzino, di stoccaggio, ecc). Il prezzo spot del granoturco sarà dunque minore di quello dei contratti futures su esso, proprio perché l'effettivo possessore sosterrà spese non compensate da altrettanti benefici.

Mais					
Date	01/11/2011	02/11/2011	03/11/2011	04/11/2011	07/11/2011
d_1	14/03/2012	14/03/2012	14/03/2012	14/03/2012	14/03/2012
d_2	14/05/2012	14/05/2012	14/05/2012	14/05/2012	14/05/2012
$T_2 - T_1$	0,1671	0,1671	0,1671	0,1671	0,1671
T_1	0,3671	0,3644	0,3616	0,3589	0,3507
T_2	0,5342	0,5315	0,5288	0,5260	0,5178
$D(d_1)$	0,9980	0,9980	0,9980	0,9980	0,9981
$D(d_2)$	0,9965	0,9965	0,9965	0,9965	0,9966
F^{T_1}	665,25	656	663,75	666,25	665,25
F^{T_2}	670	662	669,5	673,25	672,75
y_{12}	-3,36%	-4,54%	-4,26%	-5,36%	-5,82%
S^F	655,77	643,94	652,29	652,27	650,55

Tabella 9 – Esempio di calcolo di "convenience coefficients" e spot impliciti

I fattori di sconto sono stati ottenuti utilizzando la funzione

$$qlYieldTsDiscount$$

che ha il compito di ricavarli dalla curva forward di interesse.

Ciascun "implied spot" è stato poi utilizzato per la valutazione dei "convenience yields", osservati ogni giorno per ogni scadenza dei contratti futures disponibili (per il rame, ad esempio, sono stati ottenuti 116 tassi al giorno, per un totale di 5916).

Anche in questo caso, al fine di automatizzare la procedura, è stata creata una "macro", con il compito di estrarre maturities e quotazioni dei futures dai vettori di origine e disporli all'interno di due matrici.

Macro relativa al petrolio:

```
Sub ordina_crudeoil()
    Dim I As Integer, j As Integer, k As Integer, dat1 As Date, dat2 As Date
    I = 7
    j = 64
    k = 13
    Do
        Range(Cells(I, 9), Cells(j, 9)).Copy
```

```
        Range(Cells(7, k), Cells(64, k)).Select
        Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues
        Range(Cells(I, 11), Cells(j, 11)).Copy
        Range(Cells(66, k), Cells(123, k)).Select
        Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues
        dat1 = Cells(j, 10)
        I = I + 58
        j = j + 58
        k = k + 1
        dat2 = Cells(I, 10)
        Do While (dat1 = dat2)
            I = I + 1
            j = j + 1
            dat2 = Cells(I, 10)
        Loop
    Loop Until (j > 3738)
End Sub
```

Essa risolve anche il problema riguardante il diverso numero di strumenti quotati per ogni giorno di mercato. Il numero di contratti futures disponibili non è sempre uguale, sia perché col passare del tempo alcuni contratti scadono, sia perché il "data provider" può commettere degli errori e non fornire i dati di alcuni strumenti. Una volta ottenuto il numero minimo di quotazioni giornaliere disponibili n all'interno dei 51 giorni (nel caso del petrolio $n = 58$) si selezionano proprio n quotazioni ed n scadenze giornaliere e le si posiziona in due matrici differenti, entrambe di dimensione $(n\ x\ 51)$.

4.2 – Interpolazioni di dati

L'interpolazione è un metodo che permette di trovare nuovi punti all'interno di un piano cartesiano partendo da una serie di dati conosciuti, ipotizzando che sia i punti di origine che quelli originati siano descritti da una determinata funzione matematica.

Esistono interpolazioni di vario tipo, ognuna caratterizzata da determinati pregi e difetti. In seguito, verranno analizzate quelle più diffuse e conosciute.

4.2.1 – Interpolazione lineare, polinomiale e spline

L'interpolazione lineare è il metodo più semplice ed immediato, e consiste nell'unire tra loro due punti consecutivi nel piano con un segmento di retta.

Essendo (x_A, y_A) e (x_B, y_B) le coordinate dei due punti presi in esame, la funzione interpolante è definita come

$$f(x) = \frac{x - x_B}{x_A - x_B} y_A - \frac{x - x_A}{x_A - x_B} y_B$$

Il risultato della sua applicazione su una serie di dati è una linea spezzata continua, non differenziabile[33], che generalmente mal approssima il reale valore dei punti originati. Ha il pregio di garantire la monotonicità.

In caso di monotonicità non decrescente:

$$x_A \leq x_B \Leftrightarrow f(x_A) \leq f(x_B) \quad \forall x_A, x_B$$

In caso di monotonicità non crescente:

$$x_A \leq x_B \Leftrightarrow f(x_A) \geq f(x_B) \quad \forall x_A, x_B$$

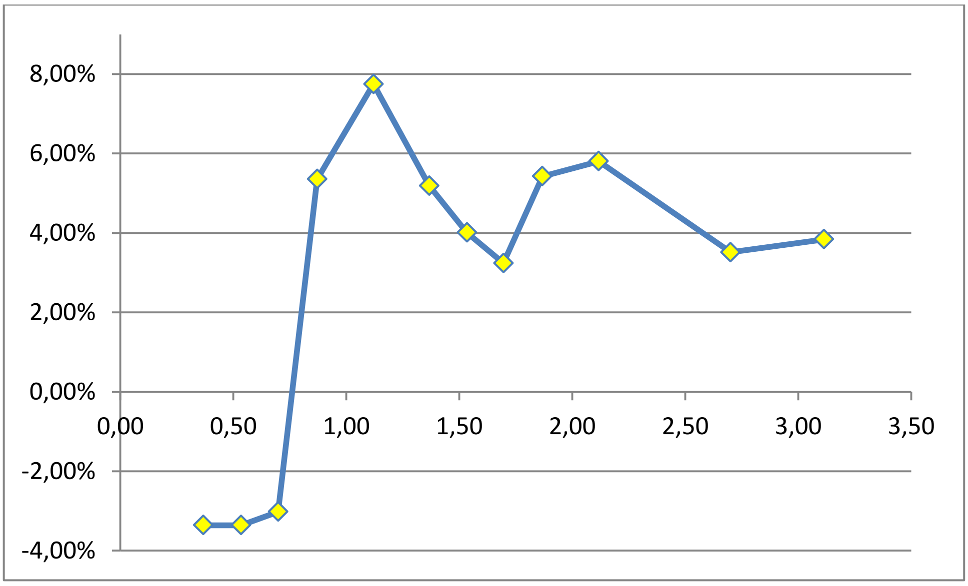

Figura 8 – Interpolazione lineare eseguita sui "convenience yields" del mais relativi al 01/01/2011 (dati originari rappresentati dai rombi gialli)

[33] Una funzione è differenziabile quando ne esistono le derivate in ogni punto del suo dominio. Nel caso esistano e siano continue le derivate di ogni ordine, la funzione viene definita "liscia".

L'interpolazione polinomiale utilizza invece una funzione interpolante polinomiale, sfruttando il fatto che, dato un insieme di n punti, esso è descrivibile esattamente da un polinomio di grado $n-1$. È una tecnica molto precisa nelle approssimazioni, ma richiede enormi risorse computazionali: il polinomio avrà con ogni probabilità un grado molto alto, e dunque la sua risoluzione sarà tutt'altro che banale. Inoltre, è colpita dal così detto "fenomeno di Runge": vicino agli estremi dell'intervallo si osservano delle oscillazioni, segnali dell'aumento nell'ampiezza dell'errore, che risultano sempre più accentuate man mano che aumenta il grado del polinomio.

Per tentare di ovviare a questi problemi, gli studiosi hanno pensato di utilizzare le funzioni di tipo spline, costituite da un insieme di polinomi di basso grado (nel nostro caso il terzo, per questo si parla di spline cubiche). L'intervallo di dati su cui si effettua l'interpolazione viene suddiviso in più sotto-intervalli, e su ciascuno di essi si applica un particolare polinomio. Infine, si deve garantire che due polinomi consecutivi si uniscano in modo "liscio", rispettando cioè la continuità delle prime $g-1$ derivate (g è il grado dei polinomi). Tutto questo, nonostante rappresenti un grande passo avanti, non risolve in toto tutti i problemi: la monotonicità, infatti, non è più garantita.

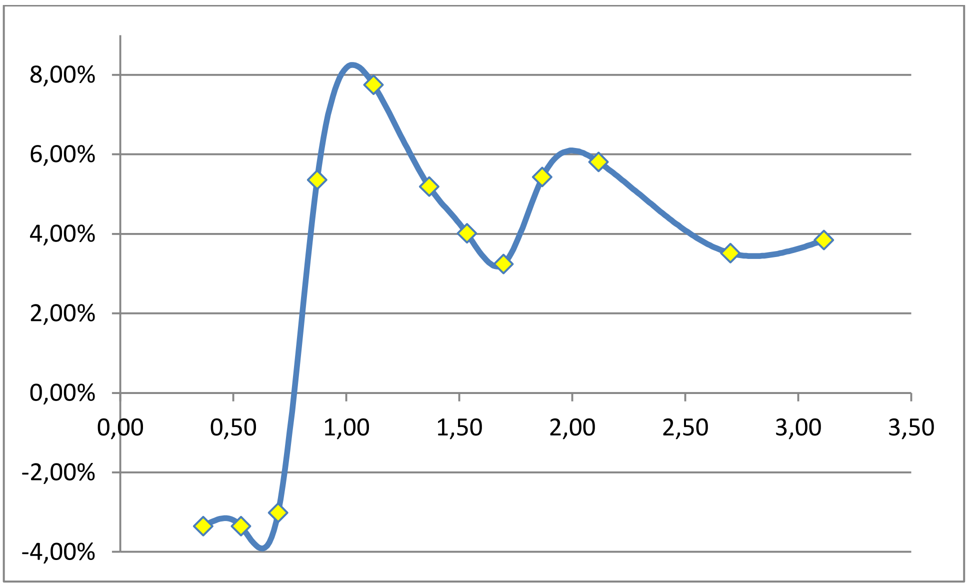

Figura 9 – Interpolazione spline cubica eseguita sui "convenience yields" del mais relativi al 01/01/2011 (mancato rispetto della monotonicità tra i nodi)

È però sufficiente imporre determinate condizioni (legate alle derivate) ai polinomi che si utilizzano per veder rispettata anche la condizione di monotonicità: si parla in questo caso di interpolazione spline monotonica.

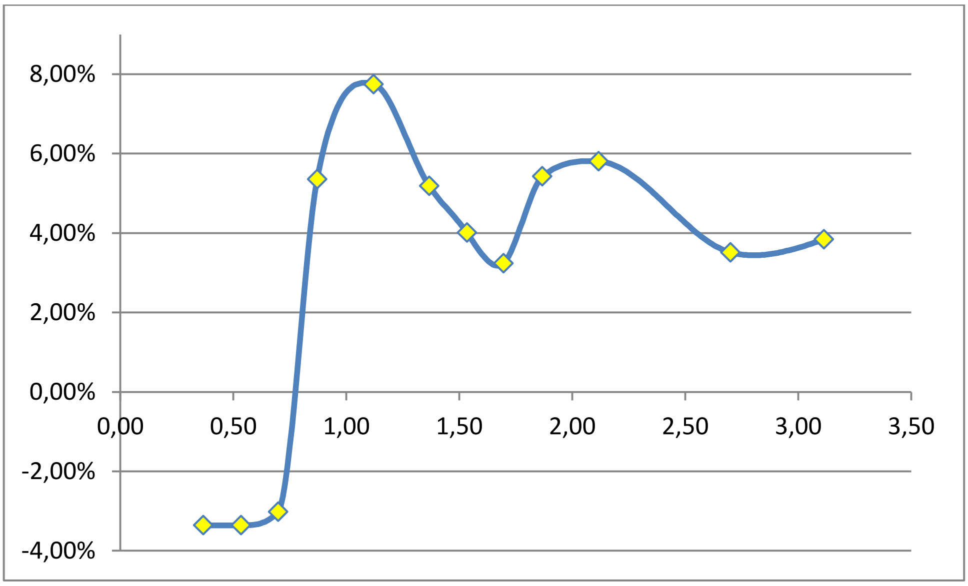

Figura 9 – Interpolazione spline cubica monotonica eseguita sui "convenience yields" del mais relativi al 01/01/2011 (monotonicità rispettata)

Proprio quest'ultima tipologia d'interpolazione sarà quella utilizzata per la realizzazione della simulazione storica, descritta nel capitolo successivo.

Capitolo 5 – La simulazione storica e la valutazione del rischio

In questo capitolo finale si parlerà del “pezzo forte” del lavoro svolto: la simulazione storica basata sulle osservazioni giornaliere disponibili.
Si illustrerà ogni singolo passo del processo, partendo dalla scelta degli strumenti da valutare e su cui costruire la posizione d’investimento, passando alla realizzazione dei primi 50 scenari giornalieri e alla simulazione di 500 scenari settimanali, per concludere infine con il “calendar-spread” e la valutazione del rischio, coadiuvata dalla “risk-decomposition”.

Si è scelto di costruire una posizione basata sullo “spread” dei prezzi di due strumenti futures, differenziale calcolato tra il prezzo del futures a scadenza più breve e quello a scadenza più lunga. La data di valutazione, ovvero quella che sarà di riferimento, è il 23/01/2012, e sono stati selezionati i futures con scadenza a 6 e 18 mesi per ciascuna commodity.

Commodity	Codice maturity	Last Trading Day
Rame	2012N	26/07/2012
Rame	2013N	26/07/2013
Mais	2012N	13/07/2012
Mais	2013N	12/07/2013
Petrolio WTI	2012N	20/06/2012
Petrolio WTI	2013N	20/06/2013

Tabella 10 – Strumenti scelti per la costruzione delle posizioni

5.1 – Costruzione degli scenari giornalieri

Utilizzando la scomposizione del prezzo di un contratto futures fornita dalla relazione “spot-forward” (in questo caso “spot-futures”)

$$F^T = Se^{(z-y)T}$$

si è realizzata una simulazione del possibile andamento del prezzo lavorando sulle componenti che lo determinano: prezzo spot, tasso zero e “convenience yield”.
La scelta, in questo caso obbligata, di utilizzo dei prezzi spot impliciti non è da considerarsi un ripiego, ma una decisione ponderata al fine di garantire affidabilità al proprio lavoro.

Il primo passo nella realizzazione della simulazione è stato quello di garantire omogeneità tra le grandezze sopracitate. A tal fine, “zero rates” e “convenience yields” sono stati giornalmente interpolati tramite spline cubiche monotoniche e ciascuna interpolazione utilizzata per trovare i valori degli stessi in determinati nodi, stabiliti arbitrariamente.

Node	Year fraction
0d	0,00
1d	0,00
2d	0,01
1w	0,02
1m	0,08
2m	0,16
3m	0,25
6m	0,50
1y	1,00
2y	2,00
3y	3,00
4y	4,01
5y	5,01
10y	10,01
15y	15,02
20y	20,01
25y	25,02

Tabella 11 – Nodi utilizzati per l’interpolazione

Per quanto riguarda i “convenience yields”, è stata effettuata un’interpolazione giornaliera sui dati di ciascuna commodity, utilizzando come variabile indipendente il tempo mancante alla scadenza dello strumento a cui si riferiscono (espresso in frazioni d’anno).

Per quel che riguarda invece i tassi zero, è stato prima necessario calcolarli nelle date di scadenza di depositi e swaps sul dollaro utilizzando le curve forward, tramite la funzione di QuantLibXL

$$qlYieldTSZeroRate$$

e solo poi si è proceduto alla loro interpolazione, utilizzando la medesima variabile indipendente del caso precedente.

23/01/2012	
Node	Zero rate
0d	0,20%
1d	0,20%
2d	0,20%
1w	0,20%
1m	0,27%
2m	0,41%
3m	0,57%
6m	0,80%
1y	1,11%
2y	0,56%
3y	0,69%
4y	0,92%
5y	1,19%
10y	2,17%
15y	2,61%
20y	2,77%
25y	2,85%

Tabella 12 – Tassi zero in corrispondenza dei nodi scelti, relativi al giorno di riferimento

Il secondo passo è stato quello di calcolare le variazioni giornaliere di ciascuna grandezza. L'idea generale è stata quella di considerare la variazione dall'oggi al domani come statisticamente simile a quella occorsa nel passato da un giorno al successivo. Per la realizzazione, quindi, sono state calcolate le differenze tra i "convenience yields" relativi ad un determinato giorno e quelli del giorno precedente, utilizzando i vettori di dati ricavati in seguito all'applicazione della prima fase della simulazione.

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta y_t^{(1)} \\ \dots \\ \Delta y_t^{(17)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_t^{(1)} - y_{t-1}^{(1)} \\ \dots \\ y_t^{(17)} - y_{t-1}^{(17)} \end{pmatrix}$$

Analogo procedimento è stato effettuato anche per i tassi zero.

$$\Delta z_t = z_t - z_{t-1}$$

Sono stati così ottenuti, partendo dai 204 vettori originari (153 per gli "yields" e 51 per i tassi zero), 200 vettori "delta" contenenti ciascuno 17 elementi.

Per quanto riguarda invece la terza componente del prezzo, il tasso spot, si è proceduto dividendo lo spot implicito relativo ad un determinato giorno per quello relativo al giorno precedente, in modo da ottenere un rapporto tra i due.

$$\Delta S_t^F = \frac{S_t^F}{S_{t-1}^F}$$

Il terzo ed ultimo passo è stato quello di interpolare, tramite spline cubiche monotoniche, i 200 vettori "delta" di tassi zero e "convenience yields", al fine di ricavare il loro valore nelle date di interesse: quelle di scadenza degli strumenti considerati. Combinando questi risultati con i rapporti degli spot impliciti sono stati ottenuti 50 probabili scenari giornalieri di variazione del prezzo dello strumento in esame (poiché gli strumenti sono sei, gli scenari totali sono trecento).

Rame 2013N	Delta			
	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4
Δy	-0,14%	0,00%	0,10%	-0,11%
Δzr	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%
ΔS^F	0,97	1,02	1,00	0,99

Tabella 13 – Esempio di quattro degli scenari di variazione relativi al futures sul rame con scadenza luglio 2013

Prendendo in considerazione spot implicito, "convenience yield" e tasso zero, ovviamente nella data di riferimento, dello strumento considerato, è possibile calcolare gli scenari giornalieri di prezzo, secondo la formula

$$F_{scenario\ i}^T = (S^F \cdot \Delta S_i^F) e^{((z+\Delta z_i)-(y+\Delta y_i))T}$$

valutata non più nella data di riferimento, bensì un giorno più tardi.
L'obiettivo del lavoro è però quello di ottenere scenari settimanali: occorre proseguire oltre.

5.2 – Costruzione degli scenari settimanali

Sfruttando gli scenari di variazione giornalieri appena realizzati è possibile giungere alla simulazione di quanti scenari settimanali si desidera. Nel caso in esame ne sono stati realizzati 500 per ciascuno strumento, per un totale di 3000.

È sufficiente combinare tra loro 5 scenari giornalieri di variazione per ricavare uno scenario di variazione settimanale. In particolare, scelti casualmente 5 scenari di variazione giornalieri:

- i Δz sono stati sommati tra loro, in modo da ottenere il Δz_{weekly}
- i Δy sono stati sommati tra loro, in modo da ottenere il Δy_{weekly}
- i ΔS^F sono stati moltiplicati tra loro, in modo da ottenere il ΔS^F_{weekly}

A questo punto entrano in gioco i valori dello spot implicito, dello "zero rate" e del "convenience yield" relativi al 23/01/2012 per lo strumento in esame:

- il tasso zero z ed il "convenience yield" y vanno sommati al Δz_{weekly} e al Δy_{weekly} per ottenere, rispettivamente, lo z_{sim} e l'y_{sim}
- lo spot implicito S^F va moltiplicato per il ΔS^F_{weekly} per ricavare l'S^F_{sim}

Ottenute le tre grandezze "simulate", si può procedere con il prezzaggio dello strumento, tramite l'usuale equazione derivata dalla relazione "spot-futures"

$$F^T_{sim} = S^F_{sim} e^{(z_{sim} - y_{sim})T}$$

valutata una settimana oltre la data di riferimento (il 30/01/2012).

Si è ripetuta la medesima operazione per 500 volte per ciascun contratto futures e si è ottenuto il numero di scenari voluto. Particolare attenzione è stata prestata all'utilizzo di dati provenienti dagli stessi vettori "delta" per quel che riguarda gli scenari degli strumenti su cui si andrà a costruire lo “spread”. È infatti necessario che, ad esempio, il Δz_{weekly} del primo scenario relativo al futures sul rame con scadenza luglio 2012 venga realizzato con i Δz provenienti dagli stessi vettori delta da cui si ricaveranno quelli del primo scenario dello strumento sulla medesima commodity con scadenza luglio 2013, per garantire ad entrambi uguali condizioni di mercato.

Scenario 1		Rame 2012N					
Δy 1	Δy 2	Δy 3	Δy 4	Δy 5	Δy_{weekly}	y	y_{sim}
-0,01%	0,02%	-0,09%	0,00%	-0,06%	-0,14%	0,50%	0,35%
Δz 1	Δz 2	Δz 3	Δz 4	Δz 5	Δz_{weekly}	z	z_{sim}
0,01%	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,03%	0,81%	0,83%
ΔS^F 1	ΔS^F 2	ΔS^F 3	ΔS^F 4	ΔS^F 5	ΔS^F_{weekly}	S^F	S^F_{sim}
0,9731	0,9967	0,9772	1,0000	0,9677	0,9173	8359,83	7668,34

y_{sim}	z_{sim}	S^F_{sim}	T	F^T_{sim}
0,35%	0,83%	7668,34	0,49	7686,31

Scenario 1		Rame 2013N					
Δy 1	Δy 2	Δy 3	Δy 4	Δy 5	Δy_{weekly}	y	y_{sim}
0,01%	0,02%	-0,01%	0,04%	-0,06%	-0,01%	0,82%	0,81%
Δz 1	Δz 2	Δz 3	Δz 4	Δz 5	Δz_{weekly}	z	z_{sim}
0,01%	0,01%	0,02%	0,04%	-0,01%	0,06%	0,74%	0,81%
ΔS^F 1	ΔS^F 2	ΔS^F 3	ΔS^F 4	ΔS^F 5	ΔS^F_{weekly}	S^F	S^F_{sim}
0,9731	0,9967	0,9772	1,0000	0,9677	0,9173	8359,83	7668,34

y_{sim}	z_{sim}	S^F_{sim}	T	F^T_{sim}
0,81%	0,81%	7668,34	1,49	7668,12

Tabella 14 – Esempio di scenario settimanale di variazione e prezzaggio degli strumenti

5.3 – Il “calendar-spread” e la “risk decomposition”

5.3.1 – Il “calendar spread”

La posizione assunta nell’investimento realizzato è detta “calendar-spread” sulla commodity, poiché ci si posiziona al contempo lunghi sul contratto futures con scadenza più breve e corti sullo strumento con scadenza più lunga.

Siano T_1 e T_2 le “maturities” dei due contratti, con $T_1 < T_2$, la funzione di prezzo di un “calendar-spread” è

$$C_S = w \cdot (F^{T_1} - F^{T_2}) = w \cdot [Se^{(z(T_1)-y(T_1))T_1} - Se^{(z(T_2)-y(T_2))T_2}]$$

ulteriormente raffinabile come

$$C_S = w \cdot F^{T_1}\left(1 - \frac{e^{(z(T_2)-y(T_2))T_2}}{e^{(z(T_1)-y(T_1))T_1}}\right) =$$

$$= w \cdot F^{T_1}\left(1 - \frac{e^{z(T_2)T_2 - z(T_1)T_1}}{e^{y(T_2)T_2 - y(T_1)T_1}}\right)$$

ove w rappresenta il numero di lotti che vengono acquistati.

Volendola esprimere in termini di “convenience yield” forward e tasso zero forward al tempo T_1 fino a T_2, rispettivamente y_{12} e zr_{12}

$$y_{12} = \frac{e^{y(T_2)T_2 - y(T_1)T_1} - 1}{T_2 - T_1}$$

$$z_{12} = \frac{e^{z(T_2)T_2 - z(T_1)T_1} - 1}{T_2 - T_1}$$

si ottiene

$$C_S = w \cdot F^{T_1}\left(1 - \frac{1 + e^{z(T_2)T_2 - z(T_1)T_1} - 1}{1 + e^{y(T_2)T_2 - y(T_1)T_1} - 1}\right) =$$

$$= w \cdot F^{T_1}\left(1 - \frac{1 + z_{12}(T_2 - T_1)}{1 + y_{12}(T_2 - T_1)}\right)$$

È proprio quest’ultima espressione ad essere stata utilizzata per prezzare i “calendar-spread” presenti nel lavoro e per effettuare la “risk-decomposition”.

Scenario 1		C_S Rame			
$F_{sim}^{T_1}$	T_1	T_2	$T_2 - T_1$		C_S
7686,31	0,49	1,49	1,00		18,18
$y(T_1)$	$y(T_2)$	y_{12}	$z(T_1)$	$z(T_2)$	z_{12}
0,35%	0,81%	1,04%	0,83%	0,81%	0,80%

Tabella 15 – Calcolo del "calendar-spread" relativo all'esempio in Tabella 14 $(w = 1)$

5.3.2 – La "risk decomposition"

Tramite la "risk-decomposition" si effettua un'analisi di sensibilità del prezzo di uno strumento alle variazioni delle sue componenti. Poiché il rischio verrà poi valutato tramite misure che prendono in esame i casi peggiori legati all'evoluzione dell'investimento (si tratterà presumibilmente di perdite), quali il VaR e l'"Expected Shortfall", sarà possibile analizzare in che misura esse siano influenzate dal prezzo del primo futures F^{T_1}, dal "convenience yield" forward y_{12} e dal tasso forward z_{12}.

L'equazione che scompone la variazione del prezzo del "calendar-spread" tra il 23/01 ed il 30/01 è stata ricavata da quella dello sviluppo di Taylor al primo ordine del prezzo dello strumento dopo una settimana, scegliendo come riferimenti le grandezze relative al tempo 0, il 23 gennaio.

Equazione generale dello sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f'(y_0)(y - y_0) +$$
$$+ f'(z_0)(z - z_0) + Residuo$$

Nel caso specifico:

$$C_S\left(F_{sim}^{T_1}, y_{12}^{sim}, zr_{12}^{sim}\right) = C_S(F^{T_1}, y_{12}, zr_{12}) + C_S'(F^{T_1})\left(F_{sim}^{T_1} - F^{T_1}\right) +$$
$$+ C_S'(y_{12})\left(y_{12}^{sim} - y_{12}\right) + C_S'(z_{12})\left(z_{12}^{sim} - z_{12}\right) + Residuo$$

da cui si ottiene la formula della variazione del prezzo

$$\Delta C_S = \frac{\partial C_S}{\partial F^{T_1}} \Delta F^{T_1} + \frac{\partial C_S}{\partial y_{12}} \Delta y_{12} + \frac{\partial C_S}{\partial z_{12}} \Delta z_{12} + Residuo$$

con

$$\frac{\partial C_S}{\partial F^{T_1}} = w \cdot \left(1 - \frac{1 + z_{12}(T_2 - T_1)}{1 + y_{12}(T_2 - T_1)}\right)$$

ad indicare la variazione del prezzo del "calendar-spread" in seguito ad una variazione unitaria del prezzo del contratto futures a scadenze più breve;

$$\frac{\partial C_S}{\partial y_{12}} = w \cdot F^{T_1} \cdot (T_2 - T_1) \left(\frac{1 + z_{12}(T_2 - T_1)}{(1 + y_{12}(T_2 - T_1))^2}\right)$$

ad indicare la variazione del prezzo del "calendar-spread" in caso il "convenience yield" forward a T_1 fino a T_2 aumenti di un'unità (+100%);

$$\frac{\partial C_S}{\partial z_{12}} = -w \cdot F^{T_1} \left(\frac{T_2 - T_1}{1 + y_{12}(T_2 - T_1)}\right)$$

ad indicare la variazione del valore del "calendar-spread" consequenziale all'aumento unitario del tasso zero forward z_{12}.

Il tutto può inoltre essere espresso in termini relativi, dividendo semplicemente ogni componente per il prezzo iniziale dello spread.

$$\frac{\Delta C_S}{C_S} = \frac{\partial C_S}{\partial F^{T_1}} \frac{\Delta F^{T_1}}{C_S} + \frac{\partial C_S}{\partial y_{12}} \frac{\Delta y_{12}}{C_S} + \frac{\partial C_S}{\partial z_{12}} \frac{\Delta z_{12}}{C_S} + \frac{Residuo}{C_S}$$

Nella realizzazione del lavoro, la variazione del prezzo del "calendar spread" è stata scomposta in due parti, una deterministica e una stocastica. Per farlo, è stato necessario calcolare il prezzo di riferimento a una settimana del differenziale, quello che in gergo viene chiamato "scenario nullo".

Per prezzare i due contratti futures relativi sono stati utilizzati i prezzi spot impliciti, i "convenience yields" ed i tassi zero datati 23 gennaio, mentre lo strumento è stato valutato una settimana a seguire. Per trovare l'esatto prezzo dello scenario nullo si sarebbero in realtà dovute utilizzare le loro controparti forward (al 30 gennaio fino a scadenza), ma il lasso temporale tra le due date è talmente ravvicinato da permettere di considerare quanto eseguito come un'ottima approssimazione.

Rame	1w ref			
S^F	$y(T_1)$	$z(T_1)$	T_1	F^{T_1}
8359,83	0,50%	0,81%	0,49	8372,50
S^F	$y(T_2)$	$z(T_2)$	T_2	F^{T_2}
8359,83	0,82%	0,74%	1,49	8350,13

Rame	today			
S^F	$y(T_1)$	$z(T_1)$	T_1	F^{T_1}
8359,83	0,50%	0,81%	0,51	8373,00
S^F	$y(T_2)$	$z(T_2)$	T_2	F^{T_2}
8359,83	0,82%	0,74%	1,51	8350,00

Tabella 16 – Rame - Valutazione degli strumenti dello scenario nullo – l'unica differenza rispetto ai dati utilizzati il 23/01 è il tempo a maturity, poiché la valutazione è eseguita il 30/01

Ottenuto lo scenario nullo, indicato con $C_S^{1w\,ref}$, la variazione dello spread è stata scomposta come

$$\Delta C_S = C_S^{sim} - C_S = C_S^{sim} - C_S^{1w\,ref} + C_S^{1w\,ref} - C_S$$

ove $C_S^{sim} - C_S^{1w\,ref}$ indica la parte stocastica e $C_S^{1w\,ref} - C_S$ quella deterministica, identica in ogni scenario considerato.

$$\Delta C_S = \Delta C_S^{stoc} + \Delta C_S^{det}$$

Calcolato il "calendar spread" relativo al 23 gennaio e quello di riferimento a una settimana, si è proceduto valutando quelli dei 500 scenari creati e la relativa "risk decomposition", effettuata solamente sulla parte stocastica della variazione.

5.4 – La valutazione del rischio

Non rimane infine altro che procedere con la valutazione del rischio di ciascun investimento della durata di una settimana in un "calendar-spread", composto da w lotti, sulla commodity desiderata.

Si è scelto di utilizzare, come misure di rischio, la diffusissima deviazione standard, il "Value at Risk" e l'"Expected Shortfall". Gli intervalli di confidenza considerati per queste ultime due sono del 99 e del 95 percento.

Poiché le osservazioni a disposizione sono 500, per determinare il VaR_α è sufficiente considerare l'n-esimo cinquecentile della distribuzione delle variazioni di prezzo, ove $n = 500 \cdot \alpha$, arrotondato, eventualmente, per eccesso.
Inoltre, visto che il VaR, per definizione, è espresso come

$$VaR_\alpha = -q_\alpha$$

sarà necessario invertire il segno del cinquecentile trovato.
Nel caso in esame, di Valore a Rischio nel 99 e nel 95 percento dei casi, i cinquecentili da selezionare saranno, rispettivamente, il quinto ed il venticinquesimo.
Le precedenti conclusioni sono utili anche ai fini del calcolo dell' "Expected Shortfall", usualmente definito come

$$ES_\alpha = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_\beta \, d\beta$$

Poiché ci si trova in un caso di distribuzione discreta, l'integrale può essere sostituito da una sommatoria

$$ES_\alpha = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i - esimo\ cinquecentile$$

L'$ES_{0,01}$ rappresenterà dunque la media aritmetica (invertita di segno) dei primi 5 cinquecentili delle variazioni di prezzo, mentre la sua controparte con $\alpha = 0{,}05$ sarà la media dei primi venticinque. Talvolta, le variazioni "estreme" potrebbero essere frutto di errori nei dati forniti dal "provider", per questo è stato proposto l'utilizzo di un "Expected Shortfall" modificato, definito come

$$ES_\alpha^{mod} = \frac{1}{\alpha}\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{3\alpha}{2}} VaR_\beta \, d\beta$$

che non le tiene in considerazione.
Volendo ricavare la sua controparte discreta, è necessario calcolare gli estremi della sommatoria, come

$$Estremo\ inferiore = \frac{1}{2}n$$

$$Estremo\ superiore = \frac{3}{2}n$$

arrotondandoli, rispettivamente, per eccesso e per difetto.

L'$ES_{0,01}^{mod}$ sarà rappresentativo della media aritmetica (invertita di segno) dei cinquecentili delle variazioni dal terzo ($\frac{1}{2}5 = 2{,}5 \rightarrow 3$) al settimo ($\frac{3}{2}5 = 7{,}5 \rightarrow 7$), mentre l'$ES_{0,05}^{mod}$ rappresenterà quella dal tredicesimo al trentasettesimo.

Si illustreranno a seguire, nel dettaglio, i risultati ottenuti avendo a disposizione 10.000 dollari da investire in ciascun contratto.

5.4.1 – Il rame ($w = 434$)

Rame - C_S						
S^F	$y(T_1)$	$z(T_1)$	T_1	F^{T_1}	y_{12}	C_S
8359,83	0,50%	0,81%	0,51	8373,00	0,99%	9982,00
S^F	$y(T_2)$	$z(T_2)$	T_2	F^{T_2}	z_{12}	
8359,83	0,82%	0,74%	1,51	8350,00	0,71%	

Rame - $C_S^{1w\,ref}$						
S^F	$y(T_1)$	$z(T_1)$	T_1	$F_{1w\,ref}^{T_1}$	$y_{12}^{1w\,ref}$	$C_S^{1w\,ref}$
8359,83	0,50%	0,81%	0,49	8372,50	0,98%	9711,29
S^F	$y(T_2)$	$z(T_2)$	T_2	$F_{1w\,ref}^{T_2}$	$z_{12}^{1w\,ref}$	
8359,83	0,82%	0,74%	1,49	8350,13	0,71%	

L'investimento iniziale in 434 lotti del "calendar-spread" sul rame prevede un esborso di 9.982,00 dollari, mentre lo scenario nullo mostra che, dopo una settimana, il valore dell'investimento sarà diminuito fino a 9.711,29 dollari.

Rame - Parte deterministica		
C_S	$C_S^{1w\,ref}$	ΔC_S^{det}
9982,00	9711,29	-270,71

Secondo la scomposizione attuata, indipendentemente dalle condizioni di mercato l'investitore perderà deterministicamente 270,71 $ durante la settimana.

Rame – Sensitivities parte stocastica		
$\partial C_S(F^{T_1}_{1w\,ref})/\partial F^{T_1}$	$\partial C_S(y^{1w\,ref}_{12})/\partial y_{12}$	$\partial C_S(z^{1w\,ref}_{12})/\partial z_{12}$
1,1599	3588628,14	-3598244,76

Un aumento di un dollaro del prezzo del futures a scadenza più breve porta il "calendar-spread" ad aumentare il suo valore di 1,16 $. Un aumento dell'uno percento del "convenience yield" forward porta ad un aumento del prezzo di 35.886,28 dollari, mentre la stessa variazione registrata dal tasso zero forward ha l'effetto contrario, e porta ad una diminuzione di 35.982,45 $.

Rame – Risk decomposition parte stocastica								
N	C_S^{sim}	$C_S^{1w\,ref}$	ΔC_S^{stoc}	F	Y	Z	$Residuo$	ΔC_S
1	-5471,34	9711,29	-15182,63	-280,45	-16516,70	1241,30	373,21	-15453,34
2	-4258,73	9711,29	-13970,02	548,19	-19559,74	5891,45	-849,92	-14240,73
3	-3927,88	9711,29	-13639,17	-446,42	-12810,85	-968,70	586,79	-13909,88
4	-3589,48	9711,29	-13300,76	-715,90	-13685,04	149,91	950,27	-13571,48
5	-3439,01	9711,29	-13150,30	-382,68	-12598,64	-646,53	477,55	-13421,01
6	-3274,81	9711,29	-12986,10	-406,00	-10944,79	-2144,54	509,24	-13256,81
7	-3204,96	9711,29	-12916,25	-396,56	-12584,87	-422,51	487,68	-13186,96
8	-1614,66	9711,29	-11325,95	-299,14	-10794,12	-549,26	316,57	-11596,66
9	-1606,69	9711,29	-11317,98	517,61	-13154,29	1958,41	-639,70	-11588,69
10	-1507,26	9711,29	-11218,55	-31,65	-11206,34	17,57	1,88	-11489,26
11	-1498,18	9711,29	-11209,47	-892,85	-8927,30	-2405,87	1016,55	-11480,18
12	-1476,89	9711,29	-11188,18	-189,87	-9073,80	-2115,75	191,23	-11458,89
13	-1400,57	9711,29	-11111,85	-138,44	-9883,04	-1218,71	128,33	-11382,57
14	-1372,82	9711,29	-11084,11	-731,45	-9826,95	-1338,63	812,91	-11354,82
15	-1151,10	9711,29	-10862,39	-209,91	-11154,87	300,56	201,83	-11133,10
16	-1126,61	9711,29	-10837,90	76,36	-12099,35	1306,40	-121,30	-11108,61
17	-958,25	9711,29	-10669,54	-125,63	-11041,01	391,45	105,64	-10940,25
18	-910,48	9711,29	-10621,77	-326,60	-8045,33	-2584,47	334,63	-10892,48
19	-900,53	9711,29	-10611,82	374,05	-12812,03	2271,01	-444,84	-10882,53
20	-822,02	9711,29	-10533,31	-252,30	-9954,46	-571,78	245,23	-10804,02
21	-796,85	9711,29	-10508,14	-363,94	-10148,92	-360,73	365,45	-10778,85
22	-660,37	9711,29	-10371,66	-410,85	-7166,80	-3213,47	419,45	-10642,37
23	-368,55	9711,29	-10079,84	-951,86	-8161,69	-1935,41	969,12	-10350,55
24	-359,02	9711,29	-10070,31	-480,55	-8521,89	-1543,39	475,51	-10341,02

Rame – Risk decomposition parte stocastica								
N	C_S^{sim}	$C_S^{1w\,ref}$	ΔC_S^{stoc}	F	Y	Z	$Residuo$	ΔC_S
25	-241,18	9711,29	-9952,47	-544,92	-8764,11	-1178,59	535,15	-10223,18
26	-44,73	9711,29	-9756,02	-244,76	-9612,56	-118,74	220,04	-10026,73
27	-10,03	9711,29	-9721,32	434,13	-10993,71	1302,32	-464,05	-9992,03
28	183,07	9711,29	-9528,22	-37,44	-11112,69	1614,40	7,52	-9798,93
29	268,24	9711,29	-9443,05	127,31	-10294,90	875,22	-150,67	-9713,76
30	407,16	9711,29	-9304,13	-50,46	-11642,24	2370,12	18,45	-9574,84
31	418,16	9711,29	-9293,13	56,84	-7964,29	-1310,84	-74,84	-9563,84
32	501,42	9711,29	-9209,87	248,88	-8735,19	-464,98	-258,58	-9480,58
33	657,41	9711,29	-9053,88	-397,75	-7160,19	-1847,77	351,84	-9324,59
34	695,26	9711,29	-9016,03	-694,19	-7743,18	-1200,18	621,52	-9286,74
35	774,08	9711,29	-8937,21	-783,64	-7675,33	-1175,14	696,91	-9207,92
36	895,83	9711,29	-8815,46	-478,42	-7313,76	-1437,59	414,30	-9086,17
37	952,91	9711,29	-8758,38	-641,73	-6759,09	-1915,66	558,10	-9029,09

$$F = \frac{\partial C_S(F_{1w\,ref}^{T_1})}{\partial F^{T_1}} \cdot \Delta F_{1w\,ref}^{T_1} \quad con \quad \Delta F_{1w\,ref}^{T_1} = F_{sim}^{T_1} - F_{1w\,ref}^{T_1}$$

$$Y = \frac{\partial C_S(y_{12}^{1w\,ref})}{\partial y_{12}} \cdot \Delta y_{12}^{1w\,ref} \quad con \quad \Delta y_{12}^{1w\,ref} = y_{12}^{sim} - y_{12}^{1w\,ref}$$

$$Z = \frac{\partial C_S(z_{12}^{1w\,ref})}{\partial z_{12}} \cdot \Delta zr_{12}^{1w\,ref} \quad con \quad \Delta z_{12}^{1w\,ref} = z_{12}^{sim} - z_{12}^{1w\,ref}$$

$$N\ indica\ l'N - esimo\ cinquecentile$$

Rame - Media e deviazione standard					
$\overline{\Delta C_S}$	$\overline{\Delta C_S^{stoc}}$	$\bar{F}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	$\overline{Residuo}$
321,89	592,60	41,96	758,48	-334,20	126,36
$\sigma(\Delta C_S)$	$\sigma(\Delta C_S^{stoc})$	$\sigma(F)$	$\sigma(Y)$	$\sigma(Z)$	$\sigma(Residuo)$
6709,73	6709,73	428,78	6424,52	2031,54	320,34

La variazione del prezzo del "calendar-spread" sarà mediamente positiva (+321,89 $) e molto volatile (il suo valore si distacca dal valore medio, mediamente, di 6709,73 $). Poiché la parte deterministica mostra una perdita (media) di 270,71 $, la parte stocastica registra mediamente un guadagno di 592,60 $, spiegato da:

- 41,96 $ guadagnati (mediamente) grazie alle variazioni del prezzo del primo futures;

- 758,48 $ incassati, in media, grazie alle variazioni del "convenience yield" forward – misura molto volatile;
- 334,20 $ persi mediamente a causa delle variazioni del tasso zero forward – misura altrettanto volatile;

Vi è poi un guadagno medio di 126,36 $ dovuto alle convessità e catalogato come "residuo" del modello (misura più stabile).

Copper	$Perdita$	Det	$Stoc$	F	Y	Z	$Residuo$
$VaR_{0,01}$	13421,01	270,71	13150,30	382,68	12598,64	646,53	-477,55
$VaR_{0,05}$	10223,18	270,71	9952,47	544,92	8764,11	1178,59	-535,15
$ES_{0,01}$	14119,29	270,71	13848,58	255,45	15034,19	-1133,49	-307,58
$ES_{0,05}$	11819,53	270,71	11548,82	282,47	11177,48	386,81	-297,94
$ES_{0,01}^{mod}$	13469,23	270,71	13198,52	469,51	12524,84	806,47	-602,31
$ES_{0,05}^{mod}$	10196,78	270,71	9926,07	261,89	9383,50	519,38	-238,71

Il $VaR_{0,01}$ mostra che, nei 5 casi peggiori, l'investitore si troverà a dover fronteggiare una perdita uguale o superiore a 13.421,01 dollari. L'investitore perde l'intero capitale investito, e registra una perdita ulteriore di 3.421 $.

Il $VaR_{0,05}$ rivela, invece, che, nei 25 casi peggiori, l'investitore subirà una perdita maggiore o uguale a 10.223,18 $. Anche in questo caso l'intero patrimonio iniziale è interamente dilapidato.

L'$ES_{0,01}$ e l'$ES_{0,05}$ presentano una perdita media, nelle rispettivamente 5 e 25 eventualità peggiori, di 14.119,29 dollari e di 11.819,53 $. Analoghe conclusioni si possono trarre dall'utilizzo della controparte modificata.

Si osservi che a guidare il valore della posizione in questi casi è soprattutto la parte stocastica, ed in particolare il "convenience yield" forward, con gli altri elementi a fare solamente, come si suole dire, da cornice.

5.4.2 – Il mais ($w = 20500$)

Mais - C_S						
S^F	$y(T_1)$	$z(T_1)$	T_1	F^{T_1}	y_{12}	C_S
615,65	-4,02%	0,78%	0,47	629,75	9,23%	9993,75
S^F	$y(T_2)$	$z(T_2)$	T_2	F^{T_2}	z_{12}	
615,65	4,71%	0,76%	1,47	581	0,75%	

Mais - $C_S^{1w\,ref}$						
S^F	$y(T_1)$	$z(T_1)$	T_1	$F_{1w\,ref}^{T_1}$	$y_{12}^{1w\,ref}$	$C_S^{1w\,ref}$
615,65	-4,02%	0,78%	0,45	629,17	9,05%	9784,71
S^F	$y(T_2)$	$z(T_2)$	T_2	$F_{1w\,ref}^{T_2}$	$z_{12}^{1w\,ref}$	
615,65	4,71%	0,76%	1,45	581,44	0,75%	

Mais – Parte deterministica		
C_S	$C_S^{1w\,ref}$	ΔC_S^{det}
9993,75	9784,71	-209,04

Per aprire la posizione sul "calendar-spread" sono necessari 9.993,75 $.

Lo scenario nullo mostra che, trascorsa una settimana, la posizione varrà 9.784,71 dollari, dunque si perderanno 209,04 $ deterministicamente.

Mais – Sensitivities parte stocastica		
$\partial C_S(F_{1w\,ref}^{T_1})/\partial F^{T_1}$	$\partial C_S(y_{12}^{1w\,ref})/\partial y_{12}$	$\partial C_S(z_{12}^{1w\,ref})/\partial z_{12}$
15,5518	109030,12	-117980,39

Le "sensitivities" rivelano un aumento del prezzo del contratto di 15,55 $ per ogni dollaro di aumento del contratto futures sottostante con scadenze più breve, un incremento dello stesso di 1.090,30 $ in caso di aumento dell'1% del "convenience forward" e una diminuzione di 1.179,80 dollari nell'eventualità che lo "zero rate" aumenti di un punto percentuale.

Mais – Risk decomposition parte stocastica								
N	C_S^{sim}	$C_S^{1w\,ref}$	ΔC_S^{stoc}	F	Y	Z	$Residuo$	ΔC_S
1	-298,49	9784,71	-10083,20	-1155,99	-9302,28	-30,87	405,94	-10292,24
2	87,85	9784,71	-9696,86	-512,36	-9002,82	42,84	-224,53	-9905,90
3	504,83	9784,71	-9279,88	-954,71	-8548,80	-14,85	238,48	-9488,92
4	663,50	9784,71	-9121,21	-806,08	-8441,76	21,89	104,74	-9330,25
5	1319,47	9784,71	-8465,24	-526,36	-7812,23	-28,08	-98,56	-8674,28
6	2452,02	9784,71	-7332,69	-928,75	-6663,00	-17,01	276,08	-7541,73
7	2544,84	9784,71	-7239,87	-642,56	-6721,74	58,93	65,51	-7448,91
8	2659,27	9784,71	-7125,44	-760,14	-6492,32	-33,22	160,24	-7334,48
9	2707,88	9784,71	-7076,83	-379,09	-6719,54	144,65	-122,85	-7285,87
10	3039,74	9784,71	-6744,97	-842,99	-6116,55	-10,43	225,00	-6954,01
11	3590,30	9784,71	-6194,41	-473,40	-5656,88	-69,68	5,55	-6403,45
12	4071,25	9784,71	-5713,46	-71,29	-5444,53	20,56	-218,20	-5922,50

Mais – Risk decomposition parte stocastica								
N	C_S^{sim}	$C_S^{1w\,ref}$	ΔC_S^{stoc}	F	Y	Z	$Residuo$	ΔC_S
13	4153,08	9784,71	-5631,63	-938,42	-4937,36	-38,69	282,83	-5840,67
14	4417,30	9784,71	-5367,41	-506,69	-4918,45	3,81	53,93	-5576,45
15	4450,91	9784,71	-5333,80	-747,43	-4743,42	-24,66	181,70	-5542,84
16	4483,98	9784,71	-5300,73	-375,35	-4884,96	-26,99	-13,43	-5509,77
17	4576,70	9784,71	-5208,01	-1225,40	-4311,56	-76,54	405,49	-5417,05
18	4596,30	9784,71	-5188,41	-669,68	-4634,97	-27,12	143,37	-5397,45
19	4643,84	9784,71	-5140,87	13,98	-4946,33	12,44	-220,96	-5349,91
20	4669,41	9784,71	-5115,30	-714,20	-4508,98	-59,06	166,94	-5324,34
21	4741,82	9784,71	-5042,89	-236,10	-4748,20	18,77	-77,36	-5251,93
22	4802,17	9784,71	-4982,54	-484,34	-4540,62	-11,56	53,98	-5191,58
23	4838,98	9784,71	-4945,73	-162,66	-4638,83	-35,80	-108,44	-5154,77
24	4902,06	9784,71	-4882,65	177,58	-4828,89	60,21	-291,55	-5091,69
25	4918,47	9784,71	-4866,24	282,91	-4795,11	-8,02	-346,02	-5075,28
26	4964,21	9784,71	-4820,50	-485,64	-4351,81	-42,91	59,86	-5029,54
27	4988,55	9784,71	-4796,16	-573,27	-4416,49	96,99	96,60	-5005,20
28	5030,20	9784,71	-4754,51	-793,95	-4211,32	53,30	197,46	-4963,55
29	5142,92	9784,71	-4641,79	-552,34	-4244,50	64,72	90,32	-4850,83
30	5153,87	9784,71	-4630,84	-308,04	-4267,17	-36,37	-19,27	-4839,88
31	5484,63	9784,71	-4300,08	-114,08	-4120,19	31,21	-97,02	-4509,12
32	5560,34	9784,71	-4224,37	-434,88	-3777,46	-62,61	50,58	-4433,41
33	5590,90	9784,71	-4193,81	-243,67	-4032,53	118,57	-36,17	-4402,85
34	5692,34	9784,71	-4092,37	-353,84	-3704,94	-53,29	19,70	-4301,41
35	5786,56	9784,71	-3998,15	-188,44	-3667,98	-97,00	-44,73	-4207,19
36	5801,53	9784,71	-3983,18	-447,76	-3542,01	-52,86	59,45	-4192,22
37	5841,54	9784,71	-3943,17	-91,95	-3707,64	-59,18	-84,40	-4152,21

Mais – Media e deviazione standard					
$\overline{\Delta C_S}$	$\overline{\Delta C_S^{stoc}}$	$\bar{F}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	$\overline{Residuo}$
328,25	537,29	-38,18	606,66	-12,54	-18,65
$\sigma(\Delta C_S)$	$\sigma(\Delta C_S^{stoc})$	$\sigma(F)$	$\sigma(Y)$	$\sigma(Z)$	$\sigma(Residuo)$
3134,34	3134,34	353,79	2954,57	58,35	96,87

Mediamente, l'investimento sul mais farà guadagnare all'investitore 328,25 dollari in una settimana, guadagno interamente dovuto (mediamente) alla parte stocastica (+537,29 \$) e solo parzialmente diminuito da quella deterministica (-209,04 \$).

La variazione stocastica media è, in questo caso, composta da una sola variazione positiva, quella relativa al "convenience yield" forward (+606,66 \$), e da tre variazioni medie negative, quelle relative al prezzo del primo futures (-38,18 $), quella del tasso zero forward (-12,54 $) e quella del residuo (-18,65 $), tutte di lieve entità se paragonate alla prima.

Si noti che le misure in esame sono tutte molto più stabili di quelle relative al rame.

Mais	$Perdita$	Det	$Stoc$	F	Y	Z	$Residuo$
$VaR_{0,01}$	8674,28	209,04	8465,24	526,36	7812,23	28,08	98,56
$VaR_{0,05}$	5075,28	209,04	4866,24	-282,91	4795,11	8,02	346,02
$ES_{0,01}$	9538,32	209,04	9329,28	791,10	8621,58	1,81	-85,21
$ES_{0,05}$	6652,25	209,04	6443,21	545,58	5934,41	5,14	-41,91
$ES_{0,01}^{mod}$	8496,81	209,04	8287,77	771,69	7637,51	-4,18	-117,25
$ES_{0,05}^{mod}$	4984,45	209,04	4775,41	406,95	4379,27	10,11	-20,91

Salta subito all'occhio il ruolo completamente marginale svolto dal tasso zero forward nella determinazione di una perdita, mentre anche in questo secondo caso è il "convenience yield" forward a farla da padrone.

Il $VaR_{0,01}$ indica una perdita che nell'1% dei casi peggiori supera o uguaglia gli 8.674,28 dollari, mentre la controparte con $\alpha = 0,05$ mostra una perdita che nel 5% dei casi peggiori è almeno pari a 5.075,28 dollari. Gli "Expected Shorfall" valutano invece una perdita media di 9.538,32 $ e 6.652,25 $, nei 5 e 25 scenari peggiori dal punto di vista dell'investitore.

Si tratta di risultati decisamente migliori di quelli ottenuti precedentemente.

5.4.3 – Il petrolio ($w = 5050$)

Petrolio - C_S						
S^F	$y(T_1)$	$z(T_1)$	T_1	F^{T_1}	y_{12}	C_S
99,30	-2,53%	0,75%	0,41	100,64	2,84%	9999,00
S^F	$y(T_2)$	$z(T_2)$	T_2	F^{T_2}	z_{12}	
99,30	1,26%	0,79%	1,41	98,66	0,82%	

Petrolio - $C_S^{1w\,ref}$						
S^F	$y(T_1)$	$z(T_1)$	T_1	$F_{1w\,ref}^{T_1}$	$y_{12}^{1w\,ref}$	$C_S^{1w\,ref}$
99,30	-2,53%	0,75%	0,39	100,58	2,76%	9635,81
S^F	$y(T_2)$	$z(T_2)$	T_2	$F_{1w\,ref}^{T_2}$	$z_{12}^{1w\,ref}$	
99,30	1,26%	0,79%	1,39	98,67	0,82%	

L'investimento iniziale, di acquisto di 5.050 lotti, comporta una spesa di 9.999,00 dollari. La posizione assunta, dopo una settimana, varrà 9.635,81 $, secondo le informazioni fornite dallo scenario nullo.

Petrolio – Parte deterministica		
C_S	$C_S^{1w\,ref}$	ΔC_S^{det}
9999,00	9635,81	-363,19

In una settimana, quindi, l'investitore perde deterministicamente 363,19 dollari dei circa 10.000 inizialmente investiti.

Petrolio – Sensitivities parte stocastica		
$\partial C_S(F_{1w\,ref}^{T_1})/\partial F^{T_1}$	$\partial C_S(y_{12}^{1w\,ref})/\partial y_{12}$	$\partial C_S(z_{12}^{1w\,ref})/\partial z_{12}$
95,8055	484871,29	-494247,86

Le "sensitivities" mostrano un "calendar-spread" curiosamente sensibile alle variazioni di prezzo del futures con scadenza a T_1: ogni variazione unitaria positiva di quest'ultimo porta il valore del primo a crescere di ben 95,81 dollari.
La sensibilità nei confronti delle variazioni dei tassi forward è, al solito, positiva per il "convenience" e negativa per lo "zero": un loro aumento dell'1% porta il prezzo del contratto a salire di 4848,71 $ nel primo caso e a scendere di 4942,48 dollari nel secondo.

Petrolio – Risk decomposition parte stocastica								
N	C_S^{sim}	$C_S^{1w\,ref}$	ΔC_S^{stoc}	F	Y	Z	$Residuo$	ΔC_S
1	-6108,82	9635,81	-15744,64	-908,09	-15495,02	-375,84	1034,31	-16107,82
2	-4382,35	9635,81	-14018,16	-366,63	-13767,84	-31,53	147,84	-14381,35
3	-4119,08	9635,81	-13754,89	-394,27	-13330,62	-227,31	197,30	-14118,08
4	-3385,67	9635,81	-13021,48	-665,34	-12677,50	-257,41	578,77	-13384,67
5	-2516,12	9635,81	-12151,93	-357,84	-11805,78	-152,98	164,67	-12515,12
6	-2413,85	9635,81	-12049,66	-677,98	-11650,06	-296,29	574,67	-12412,85
7	-1545,93	9635,81	-11181,75	-24,50	-11170,67	235,75	-222,33	-11544,93
8	-769,91	9635,81	-10405,72	-425,61	-10188,75	-39,05	247,69	-10768,91
9	-442,83	9635,81	-10078,64	-524,00	-9627,15	-281,74	354,25	-10441,83
10	-386,44	9635,81	-10022,25	-267,33	-9685,95	-152,29	83,32	-10385,44
11	195,60	9635,81	-9440,21	-138,76	-9079,37	-186,02	-36,06	-9803,40
12	465,52	9635,81	-9170,29	239,62	-8729,23	-291,51	-389,17	-9533,48

Petrolio – Risk decomposition parte stocastica								
N	C_S^{sim}	$C_S^{1w\,ref}$	ΔC_S^{stoc}	F	Y	Z	$Residuo$	ΔC_S
13	574,42	9635,81	-9061,39	-344,62	-8755,23	-126,02	164,47	-9424,58
14	586,76	9635,81	-9049,06	-412,40	-8635,28	-231,17	229,80	-9412,24
15	605,63	9635,81	-9030,19	-338,26	-8444,51	-410,98	163,56	-9393,37
16	616,55	9635,81	-9019,27	-292,18	-8617,86	-226,47	117,24	-9382,45
17	720,53	9635,81	-8915,29	-513,13	-8730,18	10,91	317,11	-9278,47
18	756,30	9635,81	-8879,51	-188,09	-8558,70	-153,49	20,77	-9242,70
19	888,72	9635,81	-8747,09	-471,49	-8213,77	-344,16	282,33	-9110,28
20	993,84	9635,81	-8641,98	-170,31	-8460,53	-17,13	6,00	-9005,16
21	1025,80	9635,81	-8610,01	-404,98	-8596,96	179,72	212,20	-8973,20
22	1071,95	9635,81	-8563,86	-345,48	-8034,22	-352,34	168,18	-8927,05
23	1133,99	9635,81	-8501,83	-476,15	-8206,39	-97,44	278,16	-8865,01
24	1248,66	9635,81	-8387,15	-354,07	-8204,77	2,57	169,12	-8750,34
25	1313,81	9635,81	-8322,01	182,18	-8487,35	283,14	-299,97	-8685,19
26	1447,19	9635,81	-8188,62	-598,32	-7658,20	-310,23	378,13	-8551,81
27	1508,81	9635,81	-8127,00	-105,63	-7892,52	-89,30	-39,56	-8490,19
28	1649,25	9635,81	-7986,57	-354,23	-7676,54	-125,01	169,22	-8349,75
29	1739,64	9635,81	-7896,17	-327,20	-7634,37	-80,61	146,01	-8259,36
30	1758,06	9635,81	-7877,75	-813,59	-7222,00	-381,80	539,63	-8240,94
31	1768,47	9635,81	-7867,34	-302,10	-7591,99	-99,11	125,86	-8230,53
32	1781,08	9635,81	-7854,74	-302,19	-7474,07	-206,04	127,57	-8217,92
33	1836,21	9635,81	-7799,60	-726,09	-7404,55	-131,73	462,77	-8162,79
34	1864,47	9635,81	-7771,34	181,31	-7546,18	-141,38	-265,09	-8134,53
35	1864,83	9635,81	-7770,98	-307,15	-7740,84	151,03	125,98	-8134,17
36	1878,95	9635,81	-7756,86	-472,94	-7363,17	-183,52	262,76	-8120,05
37	1912,90	9635,81	-7722,92	222,95	-7541,93	-106,70	-297,24	-8086,10

Petrolio – Media e deviazione standard					
$\overline{\Delta C_S}$	$\overline{\Delta C_S^{stoc}}$	$\bar{F}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	$\overline{Residuo}$
-135,55	227,64	99,66	119,59	-63,47	71,86
$\sigma(\Delta C_S)$	$\sigma(\Delta C_S^{stoc})$	$\sigma(F)$	$\sigma(Y)$	$\sigma(Z)$	$\sigma(Residuo)$
5734,41	5734,41	338,52	5397,26	192,34	174,38

Il petrolio, diversamente dalle altre commodities, mostra una variazione del prezzo mediamente negativa, di -135,55 dollari, e altamente volatile ($\mp$5734,41 \$). Essa è imputabile in toto alla variazione deterministica, notato che quella stocastica fa registrare in media un +227,64 \$, spiegato dal +99,66 \$ della variazione media del prezzo del primo contratto futures, dal +119,59 \$ della variazione media del "convenience yield" forward e dal -63,47 \$ della variazione media dello “zero rate” forward. Il residuo medio fa registrare un “plus” di 71,86 $.

Petrolio	$Perdita$	Det	$Stoc$	F	Y	Z	$Residuo$
$VaR_{0,01}$	12515,12	363,19	12151,93	357,84	11805,78	152,98	-164,67
$VaR_{0,05}$	8685,19	363,19	8322,01	-182,18	8487,35	-283,14	299,97
$ES_{0,01}$	14101,41	363,19	13738,22	538,43	13415,35	209,01	-424,58
$ES_{0,05}$	10553,92	363,19	10190,73	345,59	9886,15	141,56	-182,57
$ES_{0,01}^{mod}$	12795,13	363,19	12431,94	423,99	12126,93	139,65	-258,62
$ES_{0,05}^{mod}$	8697,13	363,19	8333,94	321,37	8027,68	127,49	-142,60

Il “Valore a Rischio” mostra che, nel 99% dei casi, l’investitore subirà perdite inferiori a 12.515,12 $, perdita dovuta principalmente alla variazione stocastica e, in particolare, al “convenience yield” forward.

Il $VaR_{0,05}$ segnala una perdita che nei 25 casi peggiori sarà superiore a 8.685,19 dollari, e completamente spiegata dall’azione del “convenience yield” forward, visto che le variazioni di prezzo del primo futures e dello “zero rate” forward portano, diversamente dagli altri casi, a risultati positivi.

L’ES indica una perdita media che nei 5 casi peggiori è pari a 14.101,41 $ (l’investitore perde l’intero capitale inizialmente investito, più altri 4.100 dollari circa) e che nel 5% dei casi più sfavorevoli è mediamente pari a 10.553,92 dollari (viene comunque perso l’intero capitale iniziale).

Conclusione

I risultati esposti nell'ultima parte del quinto capitolo presentano un denominatore comune: in tutti e tre i casi è il "convenience yield" con le sue variazioni a farla da padrone e a provocare le perdite maggiori, con tasso zero e prezzo del primo futures a ricoprire sempre un ruolo di contorno.

	Rame			Mais			Petrolio		
	$Perdita$	ΔC_S^{stoc}	Y	$Perdita$	ΔC_S^{stoc}	Y	$Perdita$	ΔC_S^{stoc}	Y
$VaR_{0,01}$	13.421	13.150	12.599	8.674	8.465	7.812	12.515	12.152	11.806
$VaR_{0,05}$	10.223	9.952	8.764	5.075	4.866	4.795	8.685	8.322	8.487
$ES_{0,01}$	14.119	13.849	15.034	9.538	9.329	8.622	14.101	13.738	13.415
$ES_{0,05}$	11.820	11.549	11.177	6.652	6.443	5.934	10.554	10.191	9.886
$ES_{0,01}^{mod}$	13.469	13.199	12.525	8.497	8.288	7.638	12.795	12.432	12.127
$ES_{0,05}^{mod}$	10.197	9.926	9.384	4.984	4.775	4.379	8.697	8.334	8.028

Interessante notare come, nel caso d'investimento in un "calendar-spread" sul rame, ci sia la probabilità di almeno il 5% di subire una perdita che superi l'intero importo inizialmente investito solamente una settimana prima. Ciò avviene in almeno l'1% dei casi anche per il petrolio, mentre per il mais avviene eventualmente in meno dell'uno per cento dei casi (dai cinquecentili osserviamo che accade un'unica volta su 500). L'investimento nel granturco sembra essere, alla luce delle informazioni fornite dal "Value at Risk" e dall'"Expected Shortfall", l'investimento più sicuro.

	Sensitivities parte stocastica		
	$\partial C_S(F_{1w\,ref}^{T_1})/\partial\, F^{T_1}$	$\partial C_S(y_{12}^{1w\,ref})/\partial y_{12}$	$\partial C_S(z_{12}^{1w\,ref})/\partial z_{12}$
Rame	1,1599	3.588.628,14	-3.598.244,76
Mais	15,5518	109.030,12	-117.980,39
Petrolio	95,8055	484.871,29	-494.247,86

L'analisi delle "sensitivities" fornisce una serie di informazioni molto utili.
Il "calendar-spread" sul petrolio è straordinariamente sensibile alle variazioni del prezzo del primo futures, mentre quello sul rame lo è molto poco. Quest'ultimo è però il più sensibile alle variazioni di "convenience yield" e tasso zero forward:

costituendo il "convinience yield" la maggiore fonte di rischio, è spiegato perché sia proprio l'investimento sul rame ad essere il più rischioso. Analoghe motivazioni spiegano la rischiosità minore dell'investimento sul mais, il meno sensibile alle variazioni.

Rame - Media e deviazione standard					
$\overline{\Delta C_S}$	$\overline{\Delta C_S^{stoc}}$	$\bar{F}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	$\overline{Residuo}$
321,89	592,60	41,96	758,48	-334,20	126,36
$\sigma(\Delta C_S)$	$\sigma(\Delta C_S^{stoc})$	$\sigma(F)$	$\sigma(Y)$	$\sigma(Z)$	$\sigma(Residuo)$
6709,73	6709,73	428,78	6424,52	2031,54	320,34

Mais – Media e deviazione standard					
$\overline{\Delta C_S}$	$\overline{\Delta C_S^{stoc}}$	$\bar{F}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	$\overline{Residuo}$
328,25	537,29	-38,18	606,66	-12,54	-18,65
$\sigma(\Delta C_S)$	$\sigma(\Delta C_S^{stoc})$	$\sigma(F)$	$\sigma(Y)$	$\sigma(Z)$	$\sigma(Residuo)$
3134,34	3134,34	353,79	2954,57	58,35	96,87

Petrolio – Media e deviazione standard					
$\overline{\Delta C_S}$	$\overline{\Delta C_S^{stoc}}$	$\bar{F}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	$\overline{Residuo}$
-135,55	227,64	99,66	119,59	-63,47	71,86
$\sigma(\Delta C_S)$	$\sigma(\Delta C_S^{stoc})$	$\sigma(F)$	$\sigma(Y)$	$\sigma(Z)$	$\sigma(Residuo)$
5734,41	5734,41	338,52	5397,26	192,34	174,38

Qualunque sia la materia prima scelta, deterministicamente viene mostrata sempre e comunque una variazione negativa.

L'unica commodity a rivelare una variazione del prezzo mediamente negativa è il petrolio, mentre il mais è quello che conduce ai risultati in media migliori, leggermente più alti di quelli raggiunti dal rame. L'analisi della deviazione standard ci permette di giungere alle medesime conclusioni sulla rischiosità precedenti: è il granturco a rappresentare l'investimento mediamente meno rischioso, seguito da petrolio e rame, quello che presenta la variazione del prezzo maggiormente volatile.

Per quel che riguarda la sola variazione stocastica, è il rame a presentare i risultati migliori (in media), con il petrolio a coprire nuovamente il ruolo di "fanalino di coda", pur presentando risultati positivi.

La variazione del prezzo del primo futures è mediamente positiva per rame e petrolio, e negativa per il mais. Mentre per granturco e rame rappresenta una piccola parte della variazione stocastica media, mentre nel caso del petrolio è una componente piuttosto rappresentativa (in accordo con quanto visto analizzando le "sensitivities").
Le variazioni medie del "convenience yield" forward di rame e mais confermano l'importanza di questo fattore di rischio non solo per i valori estremi delle variazioni, ma anche mediamente. L'andamento del prezzo di un "calendar-spread" sul petrolio, invece, non presenta un tale dominio del "convenience yield", ma sembra dividere quasi equamente il rischio tra tutti i suoi fattori di variazione. Interessante notare che la variazione del "convenience yield" forward del mais sia la meno volatile delle tre, ulteriore elemento per concludere che sia proprio questo l'investimento meno rischioso.
L'effetto di una variazione del tasso zero forward è mediamente negativa per ognuna delle tre commodities. Mentre per il mais questa variazione media è di poco conto rispetto alla variazione stocastica, per rame e petrolio costituisce un importante fattore di rischio.
Infine il residuo medio è, se confrontato con la variazione stocastica media, basso per il granoturco e molto alto per il petrolio, a sottintendere che, evidentemente, la variazione del prezzo di un "calendar-spread" su quest'ultimo è spiegata soprattutto dalle convessità e non molto dalle "sensitivities".

Alla luce dell'analisi effettuata, è semplice selezionare quale investimento preferire: quello sul mais. Esso, infatti, presenta i risultati mediamente migliori ed il rischio minore, risultando una scelta pressoché obbligata. Nessuna attrattiva sembra invece contraddistinguere l'investimento sul petrolio, altamente volatile e con risultati mediamente negativi.

Bibliografia e linkografia

- Geman, Helyette (2005), *"Commodities and commodity derivatives"*, Wiley Finance

- Bacon, Carl R. (2004), *"Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution"*, Wiley Finance

- Marchioro, Marco (2012), *"Convenience yield scenario for commodities"*, StatPro Italia s.r.l., Milano

- Marchioro, Marco (2011), *"Sensitivities for fixed-income attribution"*, StatPro Italia s.r.l., Milano

- Marchioro, Marco (2008), *"Pricing simple interest-rate derivatives"*, StatPro Italia s.r.l., Milano

- Mijnen, Bas & Zhang, Zhuorui (2011), *"Financial interpolation – Yield curve and forward curve"*, Rabobank

- Sortino, Frank A. & Satchell, Stephen E. (2001), *"Managing downside-risk in financial markets"*, Butterworth-Heinemann

- www.cmegroup.com, sito internet del "Chicago Mercantile Exchange"

- www.lme.com, sito internet del "London Metal Exchange"

- www.unicredit.it, sito del gruppo Unicredit